

BORNES DE WEYL FRACTALES ET RÉSONANCES
[d'après Nonnenmacher-Sjöstrand-Zworski [37, 36]]

par **Frédéric Naud**

1. INTRODUCTION

Ces notes concernent un exposé Bourbaki sur un travail récent de Nonnenmacher-Sjöstrand-Zworski [37] sur les bornes de Weyl fractales pour des systèmes ouverts chaotiques. Cet article fait suite à un papier précédent [36] où la méthode de réduction à des applications quantifiées fait son apparition. D'un point de vue historique, l'article [37] marque en quelque sorte le point final à une longue série de travaux [43, 52, 19, 46] concernant les bornes de Weyl "fractales". Cela ne signifie pas que l'histoire s'arrête là, et des développements très récents concernant l'optimalité de ces bornes et les questions de trous spectraux montrent que le sujet est plus actif que jamais, on renvoie par exemple au survey [35] pour un état de l'art. La théorie des résonances n'est pas qu'un pur objet de physique mathématique : l'étude de groupes arithmétiques non co-finis (par exemples des sous-groupes d'indice infini de $SL_2(\mathbb{Z})$) conduit naturellement à des problèmes de résonances et de trous spectraux uniformes voir par exemple [5].

Pour comprendre la problématique, il faut déjà se rappeler ce qu'est la loi de Weyl pour le spectre du Laplacien sur un domaine compact à bord. Ce théorème datant de 1911 donne un asymptotique du nombre de valeurs propres du Laplacien (avec condition au bord), quand la fréquence tend vers l'infini. C'est un des résultats les plus importants de l'analyse sur les variétés Riemanniennes et de la physique mathématique. Il a motivé de nombreux développements et a conduit à la théorie moderne des équations aux dérivées partielles et surtout à l'analyse micro-locale, avec sa version semi-classique, telle que nous la connaissons aujourd'hui.

Les bornes de Weyl fractales concernent non pas un spectre de valeurs propres réelles mais un sous-ensemble discret du plan complexe appelé "spectre de résonances", correspondant au spectre d'opérateurs non auto-adjoints, dans le cas où l'espace est non-compact. Si on compte les résonances dans certaines bandes du plan complexe, on peut établir, pour un régime à haute fréquence, des majorations faisant intervenir un exposant fractionnaire liée à une dimension fractale d'un ensemble de trajectoires captés du flot hamiltonien associé.

Le plan de ces notes se déroule en deux volets : une première série de sections expositives (§2...§7) proposant un survol du sujet et énonçant résultats (et conjectures), suivi d'une section plus technique où on tente de survoler quelques aspects des méthodes de preuve.

2. LOI DE WEYL POUR LES VALEURS PROPRES

En 1911, Hermann Weyl [50] prouve le résultat suivant. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné, dont le bord est noté $\partial\Omega$. On note (en répétant avec multiplicité)

$$0 < \lambda_1^2 \leq \lambda_2^2 \leq \dots \leq \lambda_k^2 < +\infty$$

la suite des valeurs propres du *Laplacien Dirichlet* sur Ω , c'est à dire correspondant aux solutions non triviales du problème

$$\begin{cases} -\Delta f = \lambda^2 f \\ f|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases},$$

où $\Delta f = \sum_k \partial_k^2 f$ est le Laplacien usuel sur $\mathbb{R}^d$. Notons $\mathcal{N}(r)$ la fonction de comptage

$$\mathcal{N}(r) := \#\{k \in \mathbb{N} : \lambda_k \leq r\},$$

alors lorsque $r \rightarrow +\infty$, on a la formule asymptotique

$$\mathcal{N}(r) = \omega_d \frac{\text{Vol}(\Omega)}{(2\pi)^d} r^d + o(r^d),$$

où ω_d désigne le volume de la boule unité euclidienne dans $\mathbb{R}^d$, et $\text{Vol}(\Omega)$ le volume du domaine. Cette loi de croissance asymptotique du spectre est connue sous le nom de "loi de Weyl". C'est un des théorèmes emblématiques de l'analyse du siècle dernier. Cet asymptotique a connu depuis de nombreuses généralisations et raffinements, en particulier par Hörmander [23], voir par exemple [15] pour la méthode de Hörmander. Contentons nous de citer un de ses avatars semi-classique, pour le cas simple d'un opérateur de Schrödinger avec "puits de potentiel". Soit $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ un potentiel C^∞ , satisfaisant les conditions de croissance

$$V(x) \geq C\langle x \rangle^k, \text{ pour tout } |x| \geq R$$

$$\text{et } |\partial^\alpha V(x)| \leq C_\alpha \langle x \rangle^k, \text{ pour tout } |x| \geq R$$

ceci pour tout multiindice α avec des constantes $C, C_\alpha, k, R > 0$ adéquates. On a utilisé la notation $\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}$. L'opérateur de Schrödinger

$$P(h) := -h^2 \Delta + V$$

est essentiellement auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, et a un spectre discret. Notons encore

$$E_1(h) \leq E_2(h) \leq \dots \leq E_k(h) < +\infty$$

le spectre (h -dépendant) de $P(h)$ et posons (pour $a < b \in \mathbb{R}$)

$$N_{a,b}(h) := \#\{k \in \mathbb{N} : a \leq E_k(h) \leq b\}.$$

Alors lorsque $h \rightarrow 0^+$ on a

$$N_{a,b}(h) = \frac{1}{(2\pi h)^d} \text{Vol}(\{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2d} : a \leq |\xi|^2 + V(x) \leq b\}) + o(h^{-d}).$$

De ces formules asymptotiques, on retiendra deux choses : l'exposant de croissance d qui est la *dimension topologique* de l'espace, et le volume de la couche d'énergie

$$\{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2d} : a \leq |\xi|^2 + V(x) \leq b\}$$

qui montre que les asymptotiques spectrales sont de nature *microlocale*, i.e. "vivent" dans l'espace des phases. Les preuves standards de la loi de Weyl que l'on trouve dans les "textbooks" font presque toutes appel au noyau de la chaleur et à un théorème taubérien. C'est très efficace mais loin de l'intuition physique et des idées fondamentales de la mécanique quantique qui sont sous-jacentes. Nous renvoyons le lecteur par exemple à [53], chapitre 6, pour une preuve élémentaire, motivée par l'intuition physique, proche de celle de Weyl. Pour un développement avec un terme d'erreur, on recommande aussi [10]. Dans tous les cas, les preuves utilisent de manière essentielle le caractère *auto-adjoint* de l'opérateur $P(h)$, ce qui permet d'employer des techniques de min-max ou un calcul fonctionnel non-holomorphe, comme celui développé par Helffer-Sjöstrand [22].

3. RÉSONANCES

Dans le cas où on travaille sur un domaine Ω non borné, ou si l'Hamiltonien classique $H(x, \xi) = |\xi|^2 + V(x)$ a des surfaces d'énergie non bornées, le spectre L^2 de l'opérateur possède une demi-droite de spectre continu, et le spectre ponctuel est généralement fini voire vide. La généralisation naturelle de la notion de valeur propre est alors celle de "résonance" qui apparaît comme un spectre discret d'une réalisation *non auto-adjointe* de l'opérateur considéré via des espaces à poids ou un système de troncatures. Les résonances sont aussi liées à la théorie de la diffusion (scattering) et les "pôles de diffusion" coïncident dans la majorité des cas avec les résonances dont nous allons parler ci-dessous, on peut citer par exemple [33, 27] pour plus de détails sur ces questions. Nous n'utiliserons pas ici le point de vue de la matrice de diffusion.

Considérons une classe d'exemples faciles (non semi-classiques) : supposons d *impair* et regardons les opérateurs de Schrödinger $P = -\Delta + V$, où cette fois $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est lisse à support compact. Comme le spectre du Laplacien sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ est $[0, +\infty)$, la résolvante libre

$$R_0(\lambda) := (-\Delta - \lambda^2)^{-1} : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$$

est une famille holomorphe d'opérateurs bornés pour $\text{Im}(\lambda) > 0$ (on appelle demi-plan physique $\{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Im}(\lambda) > 0\}$). Une formule explicite pour $R_0(\lambda)$ est donnée par la

représentation intégrale (immédiat par Fourier) :

$$R_0(\lambda)\varphi = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{i\xi \cdot x}}{|\xi|^2 - \lambda^2} \hat{\varphi}(\xi) d\xi.$$

Il est ensuite relativement élémentaire ⁽¹⁾ de montrer que si d est impair, pour tout $\chi_1, \chi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, la résolvante tronquée

$$\chi_1 R_0(\lambda) \chi_2 : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$$

admet un prolongement holomorphe à $\mathbb{C}$. On va brièvement expliquer pourquoi on peut alors prolonger *méromorphiquement* ⁽²⁾

$$\chi_1 R_V(\lambda) \chi_2 := \chi_1 (-\Delta + V - \lambda)^{-1} \chi_2 : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$$

à $\mathbb{C}$ tout entier. L'idée clé est d'utiliser le *théorème analytique de Fredholm*, que nous citons ici, voir par exemple [53] appendice D, pour une preuve.

THÉORÈME 3.1. — *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $z \mapsto T(z)$ une famille finiment méromorphe d'opérateurs compacts agissant sur un espace de Banach séparable. Supposons qu'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $(I + T(z_0))^{-1}$ existe, alors $z \mapsto (I + T(z))^{-1}$ a un sens en tant que famille finiment méromorphe d'opérateurs sur tout l'ouvert Ω . En particulier, l'ensemble des pôles est discret dans Ω .*

Voyons comment utiliser ce théorème dans notre situation. Posons, pour $\text{Im}(\lambda) > 0$,

$$K(\lambda) = V R_0(\lambda),$$

et soit $\chi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ tel que $\chi_0 \equiv 1$ sur le support de V . On observe que

$$(-\Delta + V - \lambda^2) R_0(\lambda) = I + K(\lambda) = I + K(\lambda) \chi_0 + K(\lambda) (1 - \chi_0).$$

Comme $(1 - \chi_0)V \equiv 0$, on a

$$(I + K(\lambda)(1 - \chi_0))^{-1} = I - K(\lambda)(1 - \chi_0).$$

Par conséquent,

$$(-\Delta + V - \lambda^2) R_0(\lambda) = (I + K(\lambda)(1 - \chi_0))(I + K(\lambda) \chi_0).$$

Comme le Laplacien sur L^2 est auto-adjoint, on a

$$\|R_0(\lambda)\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \frac{1}{\text{dist}(\lambda^2, \mathbb{R}^+)},$$

ce qui montre, par un argument de série de Neumann, que l'on peut inverser $I + K(\lambda) \chi_0$ lorsque $\text{Im}(\lambda)$ est suffisamment grand. Ainsi pour $\text{Im}(\lambda) \gg 1$ on a

$$R_V(\lambda) = R_0(\lambda) (I + K(\lambda) \chi_0)^{-1} (I - K(\lambda)(1 - \chi_0)).$$

⁽¹⁾La méthode la plus élégante étant d'utiliser le propagateur des ondes et le principe de Huygens fort, valable en dimension impaire. Un argument direct de déformation de contour est aussi possible.

⁽²⁾Méromorphe signifie ici *finiment méromorphe*, au sens où il existe un développement de Laurent fini à chaque pôle, dont les résidus sont des opérateurs de rang fini.

Observons maintenant que $K(\lambda)\chi_0 = VR_0(\lambda)\chi_0 : L^2 \rightarrow L^2$ est une famille analytique d'opérateurs, qui sont de plus compacts par le théorème d'injection de Sobolev. On applique alors le théorème ci-dessus pour obtenir le prolongement méromorphe de la résolvante

$$(I + K(\lambda)\chi_0)^{-1}$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Il reste à voir qu'en tronquant à droite et à gauche de l'expression

$$R_0(\lambda)(I + K(\lambda)\chi_0)^{-1}(I - K(\lambda)(1 - \chi_0)),$$

les choses ont bien un sens pour $\lambda \in \mathbb{C}$, ce qui résulte du fait que

$$(I + K(\lambda)\chi_0)^{-1} : L_{loc}^2 \rightarrow L_{comp}^2,$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, que l'on montre par prolongement analytique.

Les pôles sont appelés *résonances*. La *multiplicité* d'une résonance λ est définie par

$$m(\lambda) = \text{Tr} \left(\int_{|\zeta - \lambda| = \epsilon} R_V(\zeta) d\zeta \right),$$

où ϵ est pris suffisamment petit pour que le disque $\{|\zeta - \lambda| \leq \epsilon\}$ ne contienne qu'un pôle. C'est le rang du projecteur spectral qui apparaît comme résidu dans le développement de Laurent au voisinage de λ . A priori, ces pôles dépendent du choix des troncatures, mais ce n'est pas le cas. L'artifice exposé ci-dessus dévoile bien un spectre discret qui a une signification intrinsèque, liée à la dynamique du flot hamiltonien dans la partie "perturbée" de l'espace des phases, là où le potentiel n'est pas trivial. Par des techniques semblables, on peut aussi définir les résonances dans le cas d'obstacles. Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné à bord lisse, et soit $-\Delta_D$ la réalisation de Dirichlet du laplacien dans $L^2(\mathbb{R}^d \setminus \overline{\mathcal{O}})$. Alors la résolvante

$$(-\Delta_D - \lambda^2)^{-1} : L^2(\mathbb{R}^d \setminus \overline{\mathcal{O}}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d \setminus \overline{\mathcal{O}}),$$

bien définie pour $\text{Im}(\lambda) > 0$, s'étend méromorphiquement à $\mathbb{C}$ lorsque l'on tronque à gauche et à droite. Là encore, la parité de l'espace joue un rôle et il faut supposer d impair pour avoir un énoncé simple. On réfère le lecteur au cours de Melrose [33] qui complète l'ouvrage classique de Lax et Phillips [27].

Les résonances peuvent être définies de manière satisfaisante dans de nombreux cadres géométriques. Contentons nous de donner une dernière famille d'exemples qui vont bien au delà de la physique mathématique. Considérons $\mathbb{H}^{n+1}$ l'espace hyperbolique de dimension $n+1$, muni de sa métrique à courbure sectionnelle -1 . Soit $X = \Gamma \backslash \mathbb{H}^{n+1}$ un quotient par un groupe discret d'isométries Γ , convexe co-compact ⁽³⁾. Un tel quotient est de volume infini mais la structure de l'infini reste raisonnable : on peut multiplier la métrique par un facteur conforme de façon à voir X comme une variété à bord lisse, c'est un cas conformément compact. Le Laplacien (positif) hyperbolique Δ_X sur $L^2(X)$

⁽³⁾Convexe co-compact signifie que le groupe Γ est finement engendré, et qu'il possède un domaine fondamental à bord totalement géodésique qui ne touche pas l'ensemble limite de Γ .

est essentiellement auto-adjoint et son spectre continu est la demi-droite $[n^2/4, +\infty)$. Si on pose

$$R_X(s) := (\Delta_X - s(n - s))^{-1} : L^2(X) \rightarrow L^2(X),$$

on a une famille analytique d'opérateurs bornés pour $\operatorname{Re}(s) > n/2$ (hormis un nombre fini de pôles correspondant au spectre ponctuel dans $(0, n^2/4)$). Il est alors possible de prolonger méromorphiquement la résolvante à $\mathbb{C}$ comme précédemment, après troncatures, ce qui est fait par Mazzeo et Melrose dans [30]. Dans le cas de la dimension 2, les surfaces $X = \Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ sont des surfaces de Riemann hyperboliques d'aire infinie, dont les bouts sont des "funnels". Une extension particulièrement élégante de la théorie de Selberg a été développée dans ce cadre et nous recommandons au lecteur l'ouvrage de Borthwick [3] qui détaille la théorie des résonances sur ces surfaces.

4. BORNES DE WEYL ENTIÈRES POUR LES RÉSONANCES

Considérons de nouveau le modèle "simple" de l'opérateur de Schrödinger

$$P_V = -\Delta + V,$$

où $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est toujours lisse à support compact. On notera $\mathcal{R}_V \subset \mathbb{C}$ l'ensemble des résonances. Un problème naturel, inspiré par la loi de Weyl, est de *compter* (avec multiplicité) les résonances dans le plan complexe : on s'intéresse donc à la fonction $N_V(R)$ définie par

$$N_V(R) := \#\{\lambda \in \mathcal{R}_V : |\lambda| \leq R\}.$$

En 1989, Zworski [51] obtient la majoration suivante.

THÉORÈME 4.1. — *Sous les hypothèses précédentes, il existe $C_V > 0$ tel que pour tout $R \geq 1$,*

$$N_V(R) \leq C_V R^d.$$

On notera l'analogie forte avec la loi de Weyl : l'exposant de croissance polynomiale est d , la dimension. Cette majoration est *optimale* au sens où on peut obtenir une minoration du même ordre pour une famille générique de potentiels, voir le travail de Christiansen-Hislop [8]. Un travail très récent de Dinh-Vu [11] montre qu'il est même possible d'obtenir un asymptotique en tout point analogue à la loi de Weyl pour des potentiels génériques. Il va sans dire que les preuves font appel à une technologie plus évoluée que l'argument du min-max de Weyl. Contentons nous ici d'évoquer les arguments de Zworski, qui sont une très bonne entrée en matière pour aborder les méthodes que nous retrouverons plus loin.

L'idée basique consiste à "fabriquer" une fonction holomorphe dont les zéros vont coïncider avec les résonances, ceci avec multiplicité. Un retour sur la preuve du prolongement méromorphe de la résolvante montre que c'est $(I + K(\lambda)\chi_0)^{-1}$ qui contient

toutes les singularités. Autrement dit, on a une résonance en λ ssi -1 est dans le spectre de $K(\lambda)\chi_0 : L^2 \rightarrow L^2$. Naïvement, on voudrait considérer le "déterminant formel"

$$d(\lambda) = \det(I + K(\lambda)\chi_0),$$

sauf que ceci n'a de sens que si les opérateurs $K(\lambda)\chi_0$ sont compacts à trace. On rappelle que si $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est un opérateur compact sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, il est dit "à trace", ou "nucléaire" ssi la suite des valeurs propres de $\sqrt{T^*T}$ (les valeurs singulières) est sommable. Notons $\mu_1(T) \geq \mu_2(T) \geq \dots \geq \mu_k(T)$ la suite des valeurs singulières de T et $(\lambda_k(T))_{k \geq 1}$ la suite (ordonnée par module décroissant) des valeurs propres de T . On a

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k(T)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(T) < +\infty,$$

ce qui suffit pour montrer que le produit infini (le déterminant de Fredholm)

$$\det(I + T) := \prod_{k=1}^{\infty} (1 + \lambda_k(T))$$

est convergent. Une référence classique sur ce sujet est le livre de B. Simon [42] où l'on trouvera tout le nécessaire. Dans [51], l'auteur observe que

$$(K(\lambda)\chi_0)^p : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$$

est à trace pour tout $p \geq \frac{d+1}{2}$. Ceci se fait en induisant une action sur un tore "suffisamment gros" et en utilisant des estimées explicites du spectre des tores. On peut donc considérer la famille de déterminants de Fredholm (on rappelle que d est impair)

$$H(\lambda) := \det \left(I - (K(\lambda)\chi_0)^{\frac{d+1}{2}} \right).$$

C'est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ et l'ensemble de ses zéros contient les résonances avec multiplicité. Zworski montre alors, se basant sur des inégalités de Weyl et des estimées adhoc des valeurs singulières que

$$|H(\lambda)| \leq e^{C|\lambda|^d},$$

pour tout $|\lambda| \gg 1$ et une constante $C > 0$ bien choisie. La preuve se conclut en appliquant la formule de Jensen ⁽⁴⁾, que nous citons ici pour mémoire car elle servira dans les prochaines sections.

THÉORÈME 4.2. — *Soit f une fonction holomorphe au voisinage du disque fermé $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$. On suppose que $f(0) \neq 0$. Notons $n(t)$ le nombre de zéros de f dans le disque fermé $D(0, R)$, alors on a*

$$\int_0^R \frac{n(t)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta - \log |f(0)|.$$

⁽⁴⁾Si on veut l'appliquer telle quelle, il faut aussi vérifier que 0 n'est pas une résonance, ce qui peut se montrer dans ce cadre (principe d'absorption limite).

Ainsi en écrivant pour $\epsilon > 0$ fixé

$$N(R(1 - \epsilon)) \leq \frac{1}{\epsilon} \int_0^R \frac{n(t)}{t} dt,$$

on constate que la majoration en $O(R^d)$ de $\log |H(\lambda)|$, pour $|\lambda| = R$, donne un contrôle du nombre de zéros dans un disque de rayon $(1 - \epsilon)R$ via la formule ci-dessus.

La partie délicate de la preuve de [51] consiste donc à estimer finement les valeurs singulières de $K(\lambda)\chi_0$. L'idée consiste encore à se ramener à un modèle explicite : en passant en coordonnées polaires on se ramène à des estimées sur la sphère. On sacrifie alors de la régularité pour de la décroissance donnée par les valeurs singulières de la résolvante du Laplacien sur la sphère : voir [33, 51] pour les détails.

Ces "estimées de Weyl entières" sont connues pour tous les modèles précédemment cités : dans le cas d'obstacles ou de perturbations métriques du Laplacien sur $\mathbb{R}^d$, on consultera [44, 49]. Dans le cas des surfaces hyperboliques $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ et leurs perturbations compactes, un résultat analogue est prouvé par Guillopé et Zworski dans [21]. Le cas de dimension supérieure (conformément compact) est traité dans [20].

Il est important de souligner que ces estimées de Weyl ne sont pas sensibles aux propriétés "fines" de la perturbation (potentiel, métrique...) et ne concernent en quelque sorte que la structure de l'infini. En revanche, si on s'intéresse aux zones sans résonances (trous spectraux...) on se trouve tout de suite confronté aux propriétés dynamiques du système "classique" sous-jacent, en particulier l'hypothèse de non-capture qui apparaît dans de nombreux travaux. Notre but n'étant pas de faire une revue exhaustive de la littérature sur les résonances, nous passerons donc sous silence certains autres aspects de la théorie (quasi-modes, systèmes intégrables, utilisation de KAM) pour se concentrer sur l'objectif de cet exposé.

5. BORNES DE WEYL FRACTALES ET CHAOS CLASSIQUE

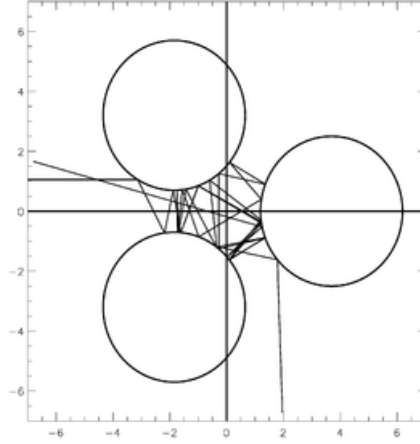
Nous décrivons maintenant le théorème de Nonnenmacher-Sjöstrand-Zworski. Soit

$$\mathcal{O} = \cup_{j=1}^J \mathcal{O}_j \subset \mathbb{R}^d$$

un ouvert borné tel que :

1. Chaque ouvert $\mathcal{O}_j$ est borné à bord C^∞ , et d'adhérence strictement convexe.
2. Les $\mathcal{O}_j$ sont deux à deux disjoints.
3. Pour tout $i \neq j$ et $\ell \notin \{i, j\}$, on a $\overline{\mathcal{O}_\ell} \cap \text{Conv}(\overline{\mathcal{O}_i} \cup \overline{\mathcal{O}_j}) = \emptyset$, où "Conv" désigne l'enveloppe convexe.

Dans $(\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{O}) \times S^{d-1}$, où S^{d-1} désigne la sphère euclidienne unité, il est possible de définir un *flot de billard ouvert* ϕ_t où $\phi_t(x, \xi)$ est l'image au temps t du couple (x, ξ) évoluant à vitesse unité suivant la direction ξ , avec réflexions éventuelles sur $\partial\mathcal{O}$, suivant les lois de Descartes de l'optique géométrique.



Un système billard ouvert à 3 disques.

L'ensemble capté K consiste en l'ensemble des points (x, ξ) de l'espace des phases $(\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{O}) \times S^{d-1}$ qui sont tels que $\phi_t(x, \xi)$ reste borné lorsque $t \rightarrow \pm\infty$. On peut vérifier que c'est un compact. Si $J = 1$, il n'y a pas d'orbite captée et si $J = 2$, il y en a une seule, correspondant à l'unique orbite périodique qui "rebondit" entre les deux obstacles, voir §6 pour des détails sur les résonances. L'hypothèse 3), appelée condition d'Ikawa, garantit que l'ensemble capté K ne contient pas de *rayon rasant*, i.e. tangent à l'un des obstacles. C'est une condition technique qui garantit que le flot billard n'a pas de singularités du type "billard de Sinai". Le théorème de Nonnenmacher-Sjöstrand-Zworski [37] est le suivant.

THÉORÈME 5.1. — *Notons $\mathcal{R} \subset \mathbb{C}$ l'ensemble des résonances du laplacien Dirichlet $-\Delta_D$ sur $L^2(\mathbb{R}^d \setminus \overline{\mathcal{O}})$. Alors pour tout $\alpha > 0$, pour tout $\epsilon > 0$, on a lorsque $r \rightarrow +\infty$,*

$$\#\{\lambda \in \mathcal{R} : \operatorname{Im}(\lambda) \geq -\alpha \text{ et } r \leq \operatorname{Re}(\lambda) \leq r + 1\} = O(r^{\mu+\epsilon}),$$

où $2\mu + 1$ est la dimension de Minkowski de K .

Ce théorème signifie en substance que si on compte les résonances dans une "boite" localisée autour de $\operatorname{Re}(\lambda) = r$ alors, à haute fréquence $r \rightarrow +\infty$, ce nombre est majoré par $O(r^\mu)$ où μ est une *dimension fractale* liée à l'ensemble capté K . On a donc une borne de Weyl avec un exposant a priori non-entier, d'où la dénomination consacrée de borne de Weyl fractale. On comprend que l'on est dans un régime asymptotique qui "voit" les aspects plus subtils de la dynamique du billard, en particulier l'ensemble capté, qui est pourtant de mesure nulle, a une influence sur la distribution des résonances.

La dimension de Minkowski est définie comme suit. Si $K \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble borné, on pose pour $\delta > 0$

$$K_\delta := \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, K) < \delta\}.$$

On note alors

$$M_s(K) := \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{Vol}(K_\delta)}{\delta^{n-s}}.$$

La dimension est alors par définition

$$\dim_M(K) := \inf\{s > 0 : M_s(K) < +\infty\}.$$

C'est la notion de dimension ad hoc pour estimer le volume de voisinages tubulaires de sous ensembles "non-lisses" de $\mathbb{R}^n$, elle est donc particulièrement adaptée aux problèmes d'analyse. Cependant elle est moins fine que la dimension de Hausdorff ⁽⁵⁾, on renvoie le lecteur à un ouvrage spécialisé en théorie de la dimension comme [29], chapitre 5.

Le théorème 5.1 fait suite à plusieurs travaux majeurs sur la densité des résonances, à commencer par le premier résultat du genre du à Sjöstrand [43] puis Sjöstrand-Zworski [46]. Considérons le cas modèle de l'opérateur de Schrödinger semi-classique $P(h) = -h^2\Delta + V$, où $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, toujours en dimension impaire. On considère le flot "classique" $\Phi_t : T^*\mathbb{R}^d \rightarrow T^*\mathbb{R}^d$ associé à l'Hamiltonien $p(x, \xi) := |\xi|^2 + V(x)$. On notera H_p le champ de vecteur Hamiltonien associé à p . L'ensemble capté est par définition

$$K = \{(x, \xi) \in T^*\mathbb{R}^d : \exists M > 0, \forall t \in \mathbb{R}, |\Phi_t(x, \xi)| \leq M\}.$$

Soit $E \in \mathbb{R}$ un niveau d'énergie et posons $K_E := K \cap p^{-1}(E)$. On dit que le flot Φ_t est *hyperbolique* sur K_E s'il a les propriétés suivantes.

1. Pour tout $a \in K_E$, on a une décomposition continue de l'espace tangent $T_a p^{-1}(E) = \mathbb{R}H_p(a) \oplus E_a^+ \oplus E_a^-$, $\dim(E^\pm) = d - 1$.
2. Les sous-espaces $E^\pm$ sont Φ_t -invariants, i.e. $D_a \Phi_t(E_a^\pm) = E_{\Phi_t(a)}^\pm$.
3. Il existe $C, \lambda > 0$ tel que pour tout $a \in K_E$, pour tout $v \in E_a^\pm$,

$$\|D_a \Phi_t(v)\| \leq C e^{-\lambda t} \|v\|,$$

lorsque $t \rightarrow \pm\infty$.

Les espaces E^+ (resp. E^-) sont appelés stables (resp. instables). Un flot hyperbolique est l'archétype de la dynamique chaotique : c'est la notion la plus forte d'instabilité que l'on connaisse pour les flots. C'est une hyperbolicité *uniforme*.

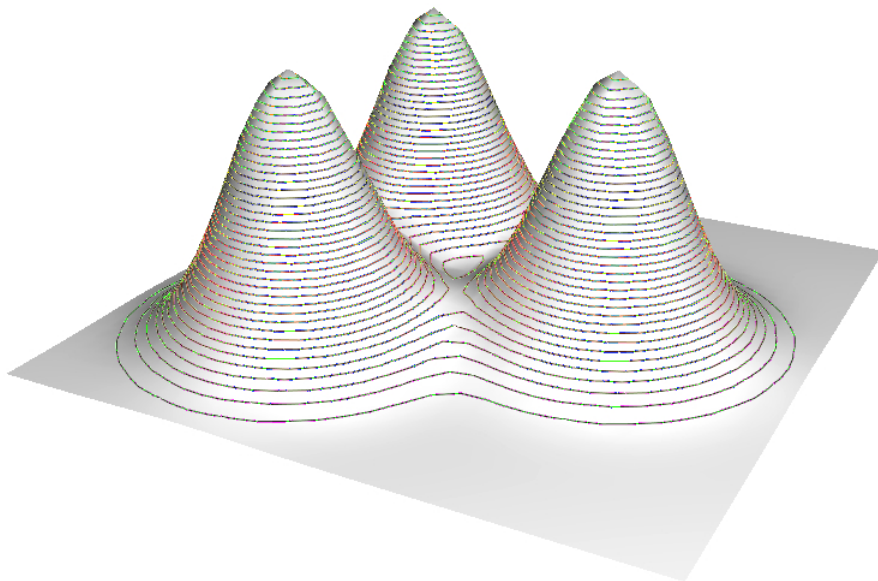
THÉORÈME 5.2. — *Sous les notations précédentes, si Φ_t est hyperbolique sur K_E , alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $h > 0$ suffisamment petit,*

$$\#(\text{Res}(P(h)) \cap D(E, h)) \leq C h^{-\mu-\epsilon},$$

où $2\mu + 1$ est la dimension de Minkowski de K_E .

On a donc un énoncé en tout point analogue au théorème 5.1. D'un point de vue classique, le flot du billard restreint à l'ensemble capté est lui aussi hyperbolique en un sens assez proche. Des exemples de potentiels satisfaisant de telles propriétés sont connus, comme le potentiel "à trois bosses" qui possède une couche d'énergie hyperbolique.

⁽⁵⁾On peut par exemple vérifier que l'ensemble $\{1/k : k \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathbb{R}$ a pour dimension de Minkowski $1/2$, alors que sa dimension de Hausdorff est bien sûr 0.



Le potentiel à 3 bosses.

Plus récemment, Datchev et Dyatlov ont prouvé un résultat très général sur les variétés asymptotiquement hyperboliques possédant un ensemble capté hyperbolique [9]. Un corollaire de leur travail est le théorème suivant.

THÉORÈME 5.3. — *Soit $X = \Gamma \backslash \mathbb{H}^{n+1}$ une variété hyperbolique convexe co-compacte. Notons $\mathcal{R}_X \subset \mathbb{C}$ l'ensemble des résonances, avec multiplicité. Pour tout $\sigma < n/2$, il existe $C > 0$ tel que pour tout r suffisamment grand,*

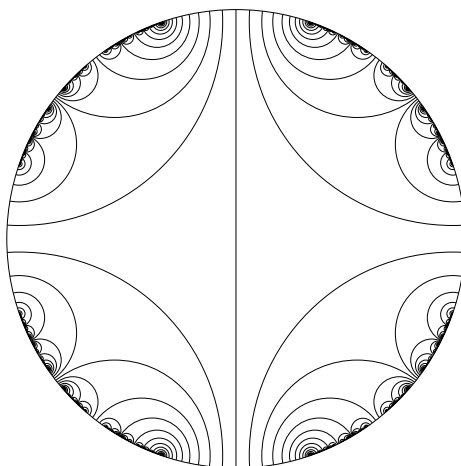
$$\#(\mathcal{R}_X \cap \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \sigma \text{ et } r \leq \operatorname{Im}(s) \leq r+1\}) \leq Cr^{\delta(\Gamma)},$$

où $\delta(\Gamma)$ est la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite de Γ .

Il s'agit encore une fois du même type d'estimées : la dimension de l'ensemble capté du flot géodésique dans T_1X est $2\delta(\Gamma) + 1$, et la courbure négative garantit que ce même ensemble capté est hyperbolique. L'ensemble limite du groupe Γ est défini comme l'ensemble des points d'accumulation des orbites au bord du revêtement universel $\mathbb{H}^{n+1}$ sous l'action de Γ . Si $z \in \mathbb{H}^{n+1}$, on pose

$$\Lambda(\Gamma) := \overline{\Gamma \cdot z} \cap \partial \mathbb{H}^{n+1}$$

Le fait qu'on puisse remplacer la dimension de Minkowski par Hausdorff et qu'on ait pas de perte ϵ dans l'exposant est du à la régularité conforme de l'ensemble limite (et donc de l'ensemble capté). Ci-dessous un tracé de l'action d'un groupe convexe co-compact à deux générateurs sur le disque hyperbolique.



L'ensemble limite d'un groupe de Schottky.

Ce théorème fait suite au travail de Zworski sur les surfaces [52] et au papier de Guillopé-Lin-Zworski [19] pour les groupes de Schottky. Une des nouveautés du théorème de Datchev-Dyatlov est qu'il couvre des exemples où l'ensemble capté est une *variété topologique*, non lisse, alors que dans tous les exemples précédemment cités, l'ensemble capté est (transversalement à la direction du flot) totalement déconnecté. Ces ensembles captés continus sont fournis par exemples par les groupes Γ dit *quasi-fuchsien*.

6. BORNES INFÉRIEURES ET EXEMPLES "EXPLICITES"

Il est impossible de passer sous silence la question de l'optimalité des bornes de Weyl fractales. Il est conjecturé depuis [17, 19, 48] que pour tous les exemples à dynamique hyperbolique, il existe une bande de type $\{-\alpha < \text{Im}(\lambda) < 0\}$, avec $\alpha > 0$ suffisamment grand tel que

$$\#\text{Res} \cap \{-\alpha < \text{Im}(\lambda) < 0 \text{ et } r < \text{Re}(\lambda) < r + 1\} \geq Cr^\mu,$$

pour tout $r \gg 1$. Les calculs numériques intensifs qui ont été menés depuis, voir [19, 48, 4] montrent que cette conjecture est plausible. Il n'y a aucun résultat mathématique rigoureux qui établit ce fait jusqu'à présent. Dans le cas des quotients $X = \Gamma \backslash \mathbb{H}^{n+1}$, où l'ensemble des résonances est noté $\mathcal{R}_X$, on sait montrer grâce à la formule de trace, que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha(\epsilon) > 0$ tel que lorsque $r \rightarrow +\infty$

$$\#\{s \in \mathcal{R}_X : -\alpha < \text{Re}(s) < n/2 \text{ et } |\text{Im}(s)| \leq r\} = \Omega(r^{1-\epsilon}).$$

Ici $\Omega(\cdot)$ signifie "n'est pas un $O(\cdot)$ ". Pour la preuve, voir [17]. Cette minoration oméga est sous linéaire : on est loin du compte. La preuve exploite l'existence d'une géodésique périodique et de ses itérés dans le spectre des longueurs (qui apparaît dans les formules de trace). Dans [26], en utilisant tout le spectre des géodésiques périodiques, il a été montré, pour des quotients $X = \Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ arithmétiques, l'existence d'une borne inférieure

de type oméga où la densité des résonances croît avec un exposant lié à la dimension $\delta(\Gamma)$ de l'ensemble limite, mais encore loin de celui proposé par la conjecture ci-dessus.

Pour les opérateurs de Schrödinger semi-classiques, des estimées sous-linéaires analogues sont aussi connues, voir [1]. Dans le cas des obstacles convexes, si on impose une condition de *Neumann* sur le bord, le même type d'estimées est établi dans [39]. Le cas de la condition de Dirichlet est *ouvert* : on ne sait pas prouver en général l'existence d'une bande avec une infinité de résonances, c'est la *conjecture de Lax-Phillips modifiée*. Des résultats partiels ont été obtenus par Ikawa et Stoyanov [25, 47] lorsque les obstacles sont "quasi-sphériques" et suffisamment éloignés les uns des autres.

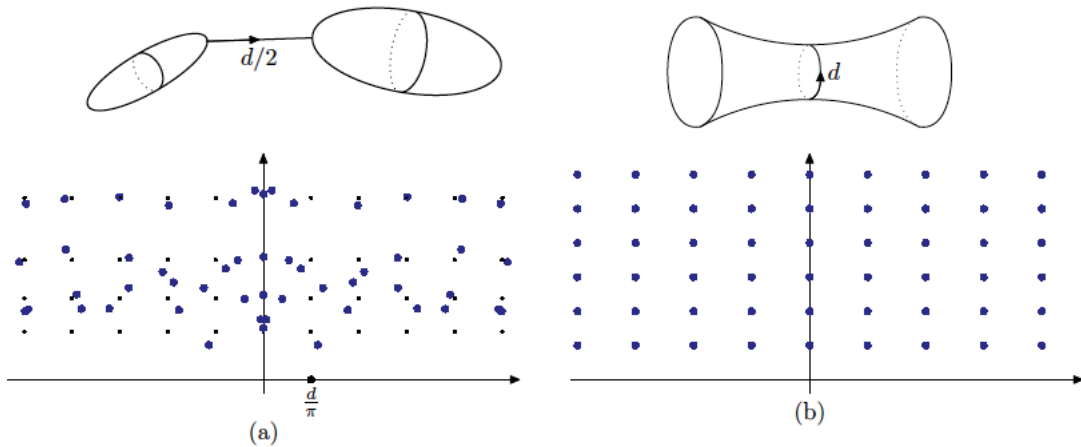
Nous poursuivons cette section par des exemples où on sait explicitement localiser les résonances : ce sont des exemples où l'ensemble capté est constitué d'une seule trajectoire périodique hyperbolique. Le premier est celui du cylindre hyperbolique $X = \Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ où Γ est un groupe engendré par une seule isométrie hyperbolique. Plus précisément, dans le modèle du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}^2 = \{\text{Im}(z) > 0\}$, muni de la métrique

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2},$$

on considère l'isométrie $g : z \mapsto e^d z$, où $d > 0$. On considère alors $\Gamma := \{g^k : k \in \mathbb{Z}\}$. Le quotient $X = \Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ a la topologie d'un cylindre, avec une seule géodésique périodique de longueur d . Une représentation "explicite" de la résolvante (basée sur une séparation des variables) permet alors de montrer que les pôles sont situés (avec le paramètre spectral $s(1-s)$) sur le réseau

$$\mathcal{R}_X = 2i\pi d\mathbb{Z} - \mathbb{N}.$$

Voir par exemple [3], chapitre 5 ou [18] pour une preuve. Dans le cas de deux obstacles strictement convexes ($J = 2$ avec les notations précédentes), on a une situation analogue avec une seule orbite captée : c'est celle qui réalise la distance entre obstacles. Dans ce cas C. Gérard [13] a montré que les résonances se répartissent asymptotiquement sur un réseau. Une version semblable pour opérateurs de Schrödinger semi-classiques est aussi étudiée dans [14].



Réseaux de résonances pour deux obstacles (a) et le cylindre (b).

Terminons en évoquant le cas non-captif. Dans toutes les théories des résonances évoquées, on sait que si il n'y a pas d'orbite captée, il n'y a qu'un nombre fini de résonances "au dessus de toute zone *log*". Plus précisément, on sait que pour tout $C > 0$,

$$\{0 \geq \text{Im}(\lambda) \geq -C \log(2 + |\text{Re}(\lambda)|)\}$$

ne contient qu'un nombre fini de résonances. Dans le cas des obstacles, ceci découle du difficile théorème de propagation des singularités de Melrose-Sjöstrand [31, 32]. Dans un cadre semi-classique, voir la preuve de Martinez [28]. La description du spectre des résonances au dessous des zones logarithmiques (dans le cas non-captif) a fait l'objet de recherches intenses que nous ne pourrions pas évoquer plus en détail ici, on renvoie le lecteur à [45] et ses références.

7. TROUS SPECTRAUX

Il n'est pas possible de passer sous silence la problématique des "trous spectraux" qui est directement liée à l'optimalité des bornes de Weyl fractales. Reprenons le cas de la diffusion par des obstacles : la borne de Weyl dit que pour tout $\alpha \geq 0$, on a pour r tendant vers l'infini,

$$\#\{\lambda \in \mathcal{R} : \text{Im}(\lambda) \geq -\alpha \text{ et } r \leq \text{Re}(\lambda) \leq r + 1\} = O(r^{\mu+\epsilon}).$$

Que se passe-t-il lorsque α est petit ? Quelle est la densité des résonances proche du réel ? Dans [7, 24], et aussi [40], il est prouvé que pour tout r grand,

$$\{\lambda \in \mathcal{R} : \text{Im}(\lambda) \geq P(1/2) \text{ et } r \leq \text{Re}(\lambda) \leq r + 1\} = \emptyset,$$

où $P(1/2)$ est la *pression topologique* de $1/2$ du "jacobien instable". Sans entrer dans les détails de la définition de la pression, contentons nous de dire qu'il s'agit d'une version pondérée de l'entropie topologique, qui mesure la compétition entre dimension transverse de l'ensemble capté et exposants de Lyapounov. En particulier, en dimension 2, si $\mu < 1/2$, $P(1/2) < 0$. On sait donc que dès que l'ensemble capté est "suffisamment petit" au sens $P(1/2) < 0$, il existe une bande près du réel avec un nombre fini de résonances : on parle de *trou spectral*. Pour une version semi-classique, on renvoie au lecteur à [38]. Il est important de noter que, contrairement à la borne de Weyl fractale, l'existence de trou spectraux avait déjà été "intuité" par les Physiciens-Chimistes Gaspard et Rice [12] dans un travail fondateur, avec déjà des arguments semi-rigoureux faisant appel à la pression topologique. Dans le cas de la courbure constante -1 , l'existence d'un trou spectral analogue découle simplement de la convergence absolue des séries de Poincaré

$$P_\Gamma(s) := \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(z, \gamma w)}$$

pour $\text{Re}(s) > \delta(\Gamma)$, ce qui montre (voir [16]) que le noyau de Schwartz de la résolvante se prolonge analytiquement jusqu'à $\{\text{Re}(s) > \delta(\Gamma)\}$.

La présence de trou spectraux montre qu'il est nécessaire d'ouvrir une "fenêtre suffisamment grande" dans le spectre pour espérer saturer la borne en $O(r^{\mu+\epsilon})$. Quelle est la taille conjecturale de cette fenêtre? L'intuition de la mécanique quantique ⁽⁶⁾ ainsi que des simulations numériques pour divers modèles [4, 41] conduisent à penser que la conjecture suivante est plausible. Nous la formulons dans le cadre des obstacles, sachant qu'elle se reformule sans problème pour tout les autres cadres que nous avons évoqués.

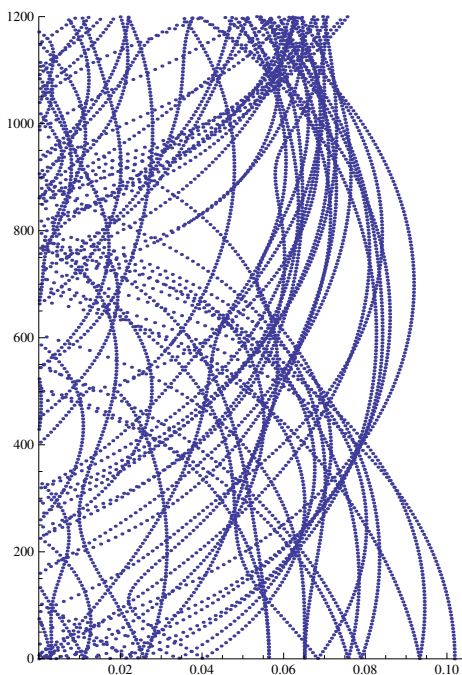
CONJECTURE 7.1. — *Pour tout $\epsilon, \tilde{\epsilon} > 0$, il existe $C > 0$ tel que pour tout r suffisamment grand,*

$$\#\left\{\lambda \in \mathcal{R} : \operatorname{Im}(\lambda) \geq -\frac{\gamma_{class}}{2} - \epsilon \text{ et } r \leq \operatorname{Re}(\lambda) \leq r+1\right\} \geq Cr^{\mu-\tilde{\epsilon}}.$$

Un mot est nécessaire pour préciser ce qu'est γ_{class} . C'est l'exposant de "fuite classique". En effet, si $\mathcal{U}$ est un ouvert intersectant l'ensemble capté (dans le fibré tangent unitaire), on peut montrer par la théorie classique de Bowen-Ruelle [6] que

$$\gamma_{class} := \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log \operatorname{Vol}(\Phi_t(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U})}{t}$$

existe et est non nul. Numériquement, on peut observer un semblant de concentration à haute fréquence au voisinage de l'axe $\{\operatorname{Im}(z) = -\frac{1}{2}\gamma_{class}\}$.



Un calcul numérique de résonances pour une surface $X = \Gamma \backslash \mathbb{H}^2$, D. Borthwick [4].

Le seul résultat rigoureux démontré à ce jour qui semble indiquer que la droite

$$\left\{\operatorname{Im}(\lambda) = -\frac{\gamma_{class}}{2}\right\}$$

⁽⁶⁾Un physicien dira que la fonction d'onde est une "demi-densité" et donc à la limite semi-classique, c'est le carré de la fonction d'onde qui doit obéir aux asymptotiques du flot classique.

joue un rôle critique est celui de l'auteur de ces notes [34], où il est montré dans le cadre des surfaces $X = \Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ que la densité des résonances est moindre dès que l'on dépasse cette ligne (qui correspond à $\operatorname{Re}(s) = \delta/2$ en utilisant le paramètre spectral s de cette théorie). Plus précisément, on y prouve que

$$\#(\mathcal{R}_X \cap \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \sigma \text{ et } |\operatorname{Im}(s)| \leq r\}) \leq Cr^{1+\tau(\sigma)},$$

avec $\tau(\sigma) < \delta$ pour $\sigma > \frac{\delta}{2}$.

8. IDÉES DE PREUVE

Nous esquissons ci-dessous les grandes lignes de la preuve du Théorème 5.1. Elle passe par plusieurs réductions successives afin de se ramener à un problème semi-classique dans la lignée de [46]. En particulier, les auteurs se basent sur les constructions de [36] qui définit une classe d'opérateurs intégraux de Fourier semi-classiques associés à des applications de premier retour (sections de Poincaré). Je précise qu'il est impossible ici d'entrer vraiment dans les détails de ce genre de preuve qui mobilise plus de 20 ans d'évolution des techniques microlocales et semi-classiques. Néanmoins, la trame générale reste naturelle : il s'agit tout simplement de montrer que, dans le régime haute fréquence, seul les états "microlocalisés" près de l'ensemble capté vont contribuer aux résonances.

8.1. Opérateurs de Poisson et restrictions

La première étape consiste à remplacer l'étude des pôles de

$$R(\lambda) := (-\Delta_D - \lambda^2)^{-1}$$

par celle de

$$P(z) := \frac{i}{h}(-h^2\Delta_D - 1) - z, \quad h > 0$$

de sorte que les résonances dans la "boite" $\{r \leq |\lambda| \leq r+1, \operatorname{Im}(\lambda) > -\alpha\}$, ($r \rightarrow +\infty$) correspondent aux pôles de $P(z)^{-1}$ lorsque $h \rightarrow 0$ et z est dans un voisinage fixé de l'origine de $\mathbb{C}$. L'opérateur $P(z)$ peut s'analyser à l'aide d'opérateurs de Poisson et restrictions associés aux obstacles $\mathcal{O}_j$, ($j = 1, \dots, J$)

$$H_j(z) : C^\infty(\partial\mathcal{O}_j) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{O}_j)$$

où

$$P(z)H_j(z)v = 0, \quad (H_j(z)v)|_{\partial\mathcal{O}_j} = v.$$

On notera aussi γ_j l'opérateur ⁽⁷⁾ de "restriction"

$$\gamma_j : C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{O}) \rightarrow C^\infty(\partial\mathcal{O}_j)$$

⁽⁷⁾Il s'agit ici de l'opérateur "trace au bord" défini de $H^2(\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{O})$ dans $H^{3/2}(\partial\mathcal{O})$.

où $\gamma_j u := u|_{\partial\mathcal{O}_j}$. L'étude de $P(z)^{-1}$ se ramène à celle de

$$(I - \mathcal{M}(z, h))^{-1} : \bigoplus_{j=1}^J C^\infty(\partial\mathcal{O}_j) \rightarrow \bigoplus_{j=1}^J C^\infty(\partial\mathcal{O}_j),$$

où $\mathcal{M}(z, h)_{i,j} = -\gamma_i H_j(z)$ si $i \neq j$ et 0 sinon. Tout le problème consiste à comprendre la structure microlocale des opérateurs $\mathcal{M}(z, h)$. Une des difficultés surmontées dans [37] consiste à montrer que $\mathcal{M}(z, h)$ se comporte, microlocalement près de l'ensemble capté $\widetilde{K}$ (voir plus loin), comme un opérateur intégral de Fourier semi-classique dont la relation canonique est donnée par l'application de premier retour du flot billard ϕ_t aux frontières des obstacles. Nous passons allègrement sous silence le problème des "rayons glissants" (glancing rays) dont il est montré que la contribution n'affecte pas le régime semi-classique étudié ici. Rappelons que $\mathcal{O} = \cup_j \mathcal{O}_j$. La dynamique hamiltonienne sous-jacente est donc celle de l'application billard ouverte

$$F : \mathcal{U}_+ \subset S^*\partial\mathcal{O} \rightarrow S^*\partial\mathcal{O}$$

où $\mathcal{U}_+$ est l'ensemble des points $(x, \xi) \in \partial\mathcal{O} \times S^{d-1}$ tels qu'il existe $t(x, \xi) > 0$ tel que $\phi_{t(x, \xi)}(x, \xi) \in \partial\mathcal{O} \times S^{d-1}$. On pose alors ⁽⁸⁾ $F(x, \xi) = \phi_{t(x, \xi)}(x, \xi)$. De manière analogue on peut définir en temps négatif

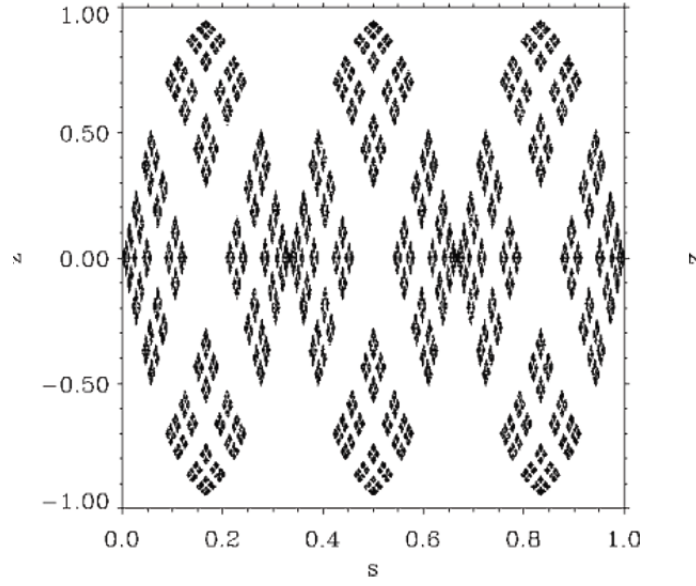
$$F^{-1} : \mathcal{U}_- = F(\mathcal{U}_+) \rightarrow S^*\partial\mathcal{O}.$$

L'ensemble capté (en temps discret positif et négatif) est donc

$$\widetilde{K} := \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} F^{-k}(S^*\partial\mathcal{O}),$$

qui est un compact totalement déconnecté (un Cantor). L'hypothèse 4) d'Ikawa garantit que F est une application uniformément hyperbolique de type fer à cheval de Smale. En quelque sorte, F est dynamiquement analogue à un difféomorphisme d'Anosov où on aurait fait un "trou" dans l'espace des phases.

⁽⁸⁾On convient ici que $F(x, \xi) = (x_1, \xi_1)$ où ξ_1 est la réflexion orthogonale de ξ par rapport à l'espace tangent en x_1 à $\partial\mathcal{O}$.



Une vue sur la structure cantorienne de $\widetilde{K}$ lorsque $\mathcal{O}$ est constitué de trois disques.

8.2. Fonctions de fuite, Grushin, puis Jensen

L'étape suivante consiste à "microlocaliser" les opérateurs $\mathcal{M}(z, h)$ près de l'ensemble capté $\widetilde{K}$, tout en préservant leur spectre (on rappelle que z est une résonance ssi 1 est une valeur propre de $\mathcal{M}(z, h)$). L'idée consiste donc à réaliser une conjugaison par des opérateurs pseudos-différentiels adéquats, i.e. considérer

$$M_{tG} := e^{-tG^w(x, hD)} \mathcal{M}(z, h) e^{+tG^w(x, hD)},$$

où $t > 0$ est un paramètre fixé, $G^w(x, hD)$ est la quantification de Weyl d'une "fonction fuite" $G(x, \xi)$. En d'autres termes, $G^w(x, hD)$ est donné localement par

$$G^w(x, hD)u(x) := \frac{1}{(2\pi h)^{d-1}} \int \int G\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) e^{i\langle x-y, \xi \rangle / h} u(y) dy d\xi.$$

L'exponentiation $e^{tG^w(x, hD)}$ n'est pas une opération totalement standard dans la classe des opérateurs pseudo-différentiel. Les auteurs utilisent ici un travail profond de Bony et Chemin [2].

Le symbole $G(x, \xi)$ est construit pour "tuer" la dynamique loin de l'ensemble capté $\widetilde{K}$, typiquement on veut que

$$d^2((x, \xi), \widetilde{K}) > h \Rightarrow G \circ F(x, \xi) - G(x, \xi) > 1/C,$$

pour un C uniforme en h . La construction d'une telle fonction de fuite utilise à fond l'hyperbolicité de F et on peut observer que G est essentiellement localisée à distance $\sqrt{h}$ de l'ensemble capté. On est ici aux limites du calcul pseudo-différentiel, ce qui oblige à utiliser des classes exotiques de symboles déjà présentes dans [46], avec les complications techniques que cela engendre (deuxième paramètre de book-keeping $\tilde{h}$). L'effet essentiel des fonctions de fuite est le suivant (cf Lemme 5.3 dans [37]). Il existe

un opérateur de rang fini $\Pi_V : L^2(\mathcal{O}) \rightarrow L^2(\mathcal{O})$ tel que pour tout $\varepsilon, \epsilon > 0$, on peut trouver $t(\epsilon) > 0$ tel que pour tout h petit,

$$\|(I - \Pi_V)M_{tG}\|_{L^2} \leq \epsilon, \text{ et } \|M_{tG}(I - \Pi_V)\|_{L^2} \leq \epsilon.$$

De plus on a lorsque $h \rightarrow 0$, $\text{Rang}(\Pi_V) \leq Ch^{-\mu-\varepsilon}$ et $\|\Pi_V\| = O(1)$. Il faut s'arrêter un instant sur l'estimée du rang de Π_V , car c'est la clé du résultat. L'opérateur Π_V est essentiellement construit comme un opérateur h -pseudo-différentiel dont le symbole est supporté à distance $\sqrt{h}$ de l'ensemble capté $\widetilde{K}$, soit un ensemble de volume ⁽⁹⁾ majoré par

$$C(\sqrt{h})^{2(d-1)-2\mu-\varepsilon}.$$

Le principe d'incertitude semi-classique fait ensuite perdre h^{-d+1} à ce volume pour majorer le rang de Π_V .

Un simple argument de série de Neumann ⁽¹⁰⁾ montre alors qu'il suffit donc de s'intéresser aux pôles de l'opérateur

$$(I - RM_{tG}\Pi_V)^{-1},$$

où

$$R = (I - (I - \Pi_V)M_{tG})^{-1}.$$

On considère alors le déterminant

$$E(z) := \det(I - RM_{tG}\Pi_V)$$

et le problème se ramène donc à majorer la densité des zéros de cette fonction holomorphe dans un voisinage de 0 lorsque $h \rightarrow 0$. On utilise alors la formule de Jensen (voir §4). En utilisant les inégalités de Weyl sur les valeurs singulières, on a

$$\log |E(z)| \leq \|RM_{tG}\|_{L^2} \|\Pi_V\|_{\text{Tr}},$$

où $\|\cdot\|_{\text{Tr}}$ désigne la norme trace (somme des valeurs singulières). Il est alors facile de voir que $\log |E(z)| = O(h^{-\mu-\varepsilon})$ puisque $\text{Rang}(\Pi_V) \leq Ch^{-\mu-\varepsilon}$ et $\|\Pi_V\| = O(1)$. Pour conclure la preuve, il faut aussi trouver un point z_0 voisin de 0 où on contrôle (inférieurement) ce déterminant. On prend pour cela $\text{Re}(z_0)$ suffisamment négatif car on sait par ailleurs que $\mathcal{M}(z, h)$ satisfait une inégalité du type (pour un certain $\tau > 0$ fixé)

$$\|\mathcal{M}(z, h)\|_{L^2} \leq Ce^{\tau \text{Re}(z)},$$

le contrôle uniforme en h des normes faisant le reste.

⁽⁹⁾l'ensemble capté a pour dimension de Minkowski 2μ

⁽¹⁰⁾ou plus élégamment, en posant un problème de Grushin adapté, technique affectionnée par les auteurs.

RÉFÉRENCES

- [1] Jean-François Bony. Minoration du nombre de résonances engendrées par une trajectoire fermée. *Comm. Partial Differential Equations*, 27(5-6) :1021–1078, 2002.
- [2] Jean-Michel Bony and Jean-Yves Chemin. Espaces fonctionnels associés au calcul de Weyl-Hörmander. *Bull. Soc. Math. France*, 122(1) :77–118, 1994.
- [3] David Borthwick. *Spectral theory of infinite-area hyperbolic surfaces*, volume 256 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007.
- [4] David Borthwick. Distribution of resonances for hyperbolic surfaces. *Exp. Math.*, 23(1) :25–45, 2014.
- [5] Jean Bourgain, Alex Gamburd, and Peter Sarnak. Generalization of Selberg’s $\frac{3}{16}$ theorem and affine sieve. *Acta Math.*, 207(2) :255–290, 2011.
- [6] Rufus Bowen and David Ruelle. The ergodic theory of Axiom A flows. *Invent. Math.*, 29(3) :181–202, 1975.
- [7] Nicolas Burq. Contrôle de l’équation des plaques en présence d’obstacles strictement convexes. *Mém. Soc. Math. France (N.S.)*, (55) :126, 1993.
- [8] T. Christiansen and P. D. Hislop. The resonance counting function for Schrödinger operators with generic potentials. *Math. Res. Lett.*, 12(5-6) :821–826, 2005.
- [9] Kiril Datchev and Semyon Dyatlov. Fractal Weyl laws for asymptotically hyperbolic manifolds. *Geom. Funct. Anal.*, 23(4) :1145–1206, 2013.
- [10] Mouez Dimassi and Johannes Sjöstrand. *Spectral asymptotics in the semi-classical limit*, volume 268 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [11] Tien-Cuong Dinh and Duc-Viet Vu. Asymptotic number of scattering resonances for generic Schrödinger operators. *Comm. Math. Phys.*, 326(1) :185–208, 2014.
- [12] Pierre Gaspard and Stuart A. Rice. Semiclassical quantization of the scattering from a classically chaotic repeller. *J. Chem. Phys.*, 90(4) :2242–2254, 1989.
- [13] C. Gérard. Asymptotique des pôles de la matrice de scattering pour deux obstacles strictement convexes. *Mém. Soc. Math. France (N.S.)*, (31) :146, 1988.
- [14] C. Gérard and J. Sjöstrand. Semiclassical resonances generated by a closed trajectory of hyperbolic type. *Comm. Math. Phys.*, 108(3) :391–421, 1987.
- [15] Alain Grigis and Johannes Sjöstrand. *Microlocal analysis for differential operators*, volume 196 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. An introduction.
- [16] Colin Guillarmou and Frédéric Naud. Wave decay on convex co-compact hyperbolic manifolds. *Comm. Math. Phys.*, 287(2) :489–511, 2009.
- [17] L. Guillopé and M. Zworski. The wave trace for Riemann surfaces. *Geom. Funct. Anal.*, 9(6) :1156–1168, 1999.
- [18] Laurent Guillopé. Fonctions zêta de Selberg et surfaces de géométrie finie. In *Zeta functions in geometry (Tokyo, 1990)*, volume 21 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 33–70. Kinokuniya, Tokyo, 1992.

- [19] Laurent Guillopé, Kevin K. Lin, and Maciej Zworski. The Selberg zeta function for convex co-compact Schottky groups. *Comm. Math. Phys.*, 245(1) :149–176, 2004.
- [20] Laurent Guillopé and Maciej Zworski. Polynomial bounds on the number of resonances for some complete spaces of constant negative curvature near infinity. *Asymptotic Anal.*, 11(1) :1–22, 1995.
- [21] Laurent Guillopé and Maciej Zworski. Scattering asymptotics for Riemann surfaces. *Ann. of Math. (2)*, 145(3) :597–660, 1997.
- [22] B. Helffer and J. Sjöstrand. Équation de Schrödinger avec champ magnétique et équation de Harper. In *Schrödinger operators (Sønderborg, 1988)*, volume 345 of *Lecture Notes in Phys.*, pages 118–197. Springer, Berlin, 1989.
- [23] Lars Hörmander. The spectral function of an elliptic operator. *Acta Math.*, 121 :193–218, 1968.
- [24] Mitsuru Ikawa. Decay of solutions of the wave equation in the exterior of several convex bodies. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 38(2) :113–146, 1988.
- [25] Mitsuru Ikawa. Singular perturbation of symbolic flows and poles of the zeta functions. *Osaka J. Math.*, 27(2) :281–300, 1990.
- [26] Dmitry Jakobson and Frédéric Naud. Lower bounds for resonances of infinite-area Riemann surfaces. *Anal. PDE*, 3(2) :207–225, 2010.
- [27] Peter D. Lax and Ralph S. Phillips. *Scattering theory*. Pure and Applied Mathematics, Vol. 26. Academic Press, New York-London, 1967.
- [28] A. Martinez. Resonance free domains for non globally analytic potentials. *Ann. Henri Poincaré*, 3(4) :739–756, 2002.
- [29] Pertti Mattila. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, volume 44 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Fractals and rectifiability.
- [30] Rafe R. Mazzeo and Richard B. Melrose. Meromorphic extension of the resolvent on complete spaces with asymptotically constant negative curvature. *J. Funct. Anal.*, 75(2) :260–310, 1987.
- [31] R. B. Melrose and J. Sjöstrand. Singularities of boundary value problems. I. *Comm. Pure Appl. Math.*, 31(5) :593–617, 1978.
- [32] R. B. Melrose and J. Sjöstrand. Singularities of boundary value problems. II. *Comm. Pure Appl. Math.*, 35(2) :129–168, 1982.
- [33] Richard B. Melrose. *Geometric scattering theory*. Stanford Lectures. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [34] Frédéric Naud. Density and location of resonances for convex co-compact hyperbolic surfaces. *Invent. Math.*, 195(3) :723–750, 2014.
- [35] Stéphane Nonnenmacher. Spectral problems in open quantum chaos. *Nonlinearity*, 24(12) :Invited paper, 2011.
- [36] Stéphane Nonnenmacher, Johannes Sjöstrand, and Maciej Zworski. From open quantum systems to open quantum maps. *Comm. Math. Phys.*, 304(1) :1–48, 2011.

- [37] Stéphane Nonnenmacher, Johannes Sjöstrand, and Maciej Zworski. Fractal Weyl law for open quantum chaotic maps. *Ann. of Math. (2)*, 179(1) :179–251, 2014.
- [38] Stéphane Nonnenmacher and Maciej Zworski. Quantum decay rates in chaotic scattering. *Acta Math.*, 203(2) :149–233, 2009.
- [39] Vesselin Petkov. Lower bounds on the number of scattering poles for several strictly convex obstacles. *Asymptot. Anal.*, 30(1) :81–91, 2002.
- [40] Vesselin Petkov and Luchezar Stoyanov. Analytic continuation of the resolvent of the Laplacian and the dynamical zeta function. *Anal. PDE*, 3(4) :427–489, 2010.
- [41] Barkhofen S., Weich T., Potzuweit A., Stoeckmann H. J., Kuhl U., and Zworski M. Experimental observation of spectral gap in microwave n-disk systems. *Phys. Rev. Lett.*, 110, 2013.
- [42] Barry Simon. *Trace ideals and their applications*, volume 120 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2005.
- [43] Johannes Sjöstrand. Geometric bounds on the density of resonances for semiclassical problems. *Duke Math. J.*, 60(1) :1–57, 1990.
- [44] Johannes Sjöstrand and Maciej Zworski. Complex scaling and the distribution of scattering poles. *J. Amer. Math. Soc.*, 4(4) :729–769, 1991.
- [45] Johannes Sjöstrand and Maciej Zworski. Asymptotic distribution of resonances for convex obstacles. *Acta Math.*, 183(2) :191–253, 1999.
- [46] Johannes Sjöstrand and Maciej Zworski. Fractal upper bounds on the density of semiclassical resonances. *Duke Math. J.*, 137(3) :381–459, 2007.
- [47] Luchezar Stoyanov. Scattering resonances for several small convex bodies and the Lax-Phillips conjecture. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 199(933) :vi+76, 2009.
- [48] John Strain and Maciej Zworski. Growth of the zeta function for a quadratic map and the dimension of the Julia set. *Nonlinearity*, 17(5) :1607–1622, 2004.
- [49] Georgi Vodev. Sharp bounds on the number of scattering poles for perturbations of the Laplacian. *Comm. Math. Phys.*, 146(1) :205–216, 1992.
- [50] Hermann Weyl. Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung). *Math. Ann.*, 71(4) :441–479, 1912.
- [51] Maciej Zworski. Sharp polynomial bounds on the number of scattering poles. *Duke Math. J.*, 59(2) :311–323, 1989.
- [52] Maciej Zworski. Dimension of the limit set and the density of resonances for convex co-compact hyperbolic surfaces. *Invent. Math.*, 136(2) :353–409, 1999.
- [53] Maciej Zworski. *Semiclassical analysis*, volume 138 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.

Frédéric Naud

Université d'Avignon,
33 rue Louis Pasteur,
84000 Avignon.

E-mail : frederic.naud@univ-avignon.fr