Notes du cours de Calcul différentiel & équations différentielles

Frédéric Naud

20 juin 2006

Chapitre 1

Rappels sur les espaces normés

Ce chapitre préliminaire est consacré à quelques rappels sur la topologie des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, qui sont le cadre naturel dans lequel on développera le calcul différentiel dans les prochains chapitres. L'exemple canonique est bien sur $\mathbb{R}^n$ auquel on consacrera de nombreux exemples, mais on s'interessera aussi aux espaces de fonctions qui sont d'usage constant en analyse. On supposera que le lecteur a en tête quelques rudiments de topologie des espaces métriques, à savoir les notions d'ouverts, fermés, interieur, adhérence, continuité, etc. Sauf mention contraire, tout les espaces vectoriels que l'on rencontrera seront [1] sur $\mathbb{R}$, ce qui est suffisant pour le calcul différentiel.

1.1 Espaces Vectoriels normés, espaces de Banach

Définition 1.1.1 *Un espace vectoriel normé réel est la donnée d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et d'une application (appelée norme)*

$$\|.\| : \begin{cases} E \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \|x\| \end{cases}$$

vérifiant les axiomes suivants :

1. $\forall\ x \in E,\ \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0.$
2. $\forall\ (x, \lambda) \in E \times \mathbb{R},\ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$
3. $\forall\ x, y \in E,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Remarques.
Sur un même espace vectoriel E, il peut exister plusieurs normes, on prend alors bien soin de distinguer leurs notations, exemple $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$.
Un espace vectoriel normé est un cas particulier d'espace *métrique* : on peut vérifier que

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

définit bien une distance d sur E si $\|.\|$ est une norme.

[1] Les théorèmes énoncés dans ce chapitre sont en fait aussi valables sur $\mathbb{C}$, voir cours d'analyse fonctionnelle.

Ceci fait donc de tout espace normé un espace *topologique* où l'on pourra désormais parler d'ouverts, fermés, de compacts, de continuité etc.

Exemples.

– Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de $\|.\|_1$, $\|.\|_\infty$ ou $\|.\|_2$ est normé si l'on a posé

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \ \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2},$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|.$$

– Si X est un espace métrique compact,

$$C(X) = \{\text{fonctions continues } f : X \to \mathbb{R}\}$$

est un espace normé pour la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

– Si $l^1(\mathbb{N})$ désigne l'espace vectoriel des suites $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telles que $\sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$ converge, c'est un espace normé si on le munit de la norme $\|x\|_1 = \sum_{i=0}^{+\infty} |x_i|$.

– L'espace des matrices carrées réelles $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni par exemple de

$$\|M\|_\infty = \max_{i,j} |M_{ij}|$$

est normé.

Proposition 1.1.1 *Un sous-ensemble $\mathcal{U} \subset E$ d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est ouvert ssi pour tout $x \in \mathcal{U}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$B(x, \varepsilon) := \{y \in E \ : \ \|x - y\| < \varepsilon\} \subset \mathcal{U}.$$

Remarques. L'ensemble $B(x, \varepsilon)$ est traditionnellement appelé *boule ouverte* centrée en x et de rayon ε. C'est bien un ouvert au sens de la définition précédente (le vérifier). On notera aussi

$$B_F(x, \varepsilon) := \{y \in E \ : \ \|x - y\| \le \varepsilon\}$$

la boule fermée correspondante. La proposition précédente découle directement de la définition métrique des ouverts. On peut se demander sous quelles conditions deux normes sur un même espace vectoriel induisent la même topologie (i.e. la même notion d'ouvert). La réponse est donnée dans ce qui suit.

Définition 1.1.2 *Deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sur un même espace E sont dites équivalentes ssi il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$ tel que pour tout $x \in E$,*

$$c_1 \|x\|_1 \le \|x\|_2 \le c_2 \|x\|_1.$$

Vérifier par exemple que $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont des normes équivalentes sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1.1.2 *Si deux normes sur un même espace sont équivalentes, elles induisent la même topologie.*

Un résultat essentiel pour nous est le suivant.

Théorème 1.1.1 *Si E est un espace vectoriel de dimension finie (sur $\mathbb{R}$), alors toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Ce théorème a une importance capitale pour la pratique : toutes les questions topologiques (ouverture, fermeture, continuité, convergence de suites etc...) peuvent être traitées en choisissant la norme qu'il nous plaira, en général la plus adaptée au problème.

On rappelle qu'une suite de vecteurs $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace normé $(E, \|.\|)$ est dite convergente dans E pour la norme $\|.\|$ ssi il existe $\widetilde{x} \in E$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \ \|\widetilde{x} - x_n\| \leq \varepsilon.$$

Une autre notion dont nous aurons parfois besoin en calcul différentiel est celle de complétude. Elle est liée aux suites de Cauchy.

Définition 1.1.3 *Une suite de vecteurs $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est dite de Cauchy ssi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq n_0$, $\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon$. Si toutes les suites de Cauchy de E sont convergentes, E est dit complet ou espace de Banach.*

L'interêt de la complétude est manifeste lorsque l'on aborde des questions de convergence de séries de vecteurs dans un espace normé. On rappelle qu'une série de vecteurs

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$$

d'un espace normé E est dite convergente (pour $\|.\|$) ssi la suite de ses sommes partielles

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$$

est convergente dans E (pour $\|.\|$). Une série de vecteurs $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ de E est dite *normalement convergente* (pour $\|.\|$) ssi la série à termes positifs $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$ est convergente.

Proposition 1.1.3 *Un espace normé E est complet si et seulement si toute série normalement convergente est convergente.*

On ne peut passer sous silence le cas de la dimension finie.

Théorème 1.1.2 *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.*

1.2 Continuité

Définition 1.2.1 *Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces normés, et $\mathcal{D} \subset E$. Une application $f : \mathcal{D} \to F$ est dite continue ssi elle vérifie l'une des trois propriétés équivalentes suivantes.*

1. *L'image réciproque par f de tout ouvert de $(F, \|.\|_F)$ est un ouvert de $\mathcal{D}$ pour la topologie induite sur $\mathcal{D}$ par celle de $(E, \|.\|_E)$.*
2. *Pour tout $x_0 \in \mathcal{D}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*
$$\|x - x_0\|_E \leq \delta \text{ et } x \in \mathcal{D} \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_F \leq \varepsilon.$$
3. *Pour tout $x_0 \in \mathcal{D}$, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = x_0$, on a $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(x_0)$.*

Lorsque E et F sont de dimension finie, cette définition est indépendante de la norme choisie. Une classe d'applications qui méritent une attention particulière est celle des applications linéaires. Si E et F sont des espaces vectoriels, on notera $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F. Si E et F sont normés, on notera $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F. La continuité est caractérisée par la proposition suivante.

Proposition 1.2.1 *Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces normés, une application $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue ssi elle vérifie l'une des conditions suivantes équivalentes.*
1. *T est continue en 0_E.*
2. *T est bornée sur la boule unité fermée de E.*
3. *Il existe $M > 0$ tel que $\|T(x)\|_F \leq M\|x\|_E$ pour tout $x \in E$.*

Ceci permet de définir une norme naturelle $\|.\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}$ (appelée aussi norme d'opérateur ou norme subordonnée aux normes $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$) sur $\mathcal{L}_c(E, F)$ (le vérifier) en posant
$$\|T\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} = \sup_{\|x\|_E\leq 1} \|T(x)\|_F.$$
C'est une norme d'algèbre compatible avec la composition. Si E, F, G sont trois espaces normés et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications linéaires continues, on a
$$\|g \circ f\|_{\mathcal{L}_c(E,G)} \leq \|g\|_{\mathcal{L}_c(F,G)}\|f\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}.$$
Il est important de noter le cas de la dimension finie :

Théorème 1.2.1 *Si E est de dimension finie, alors toute application linéaire $E \to F$ est continue.*

Un résultat fondamental sur les espaces d'applications linéaires est le suivant.

Théorème 1.2.2 *Si F est complet, alors $\mathcal{L}_c(E, F)$ est complet pour la norme d'opérateur.*

Une application intéressante est la suivante.

Proposition 1.2.2 *Soit E un espace de Banach et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction entière dont le développement en série en 0 est*
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$
Pour tout $T \in \mathcal{L}_c(E, E)$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n T^n$ est normalement convergente dans $\mathcal{L}_c(E, E)$ pour la norme d'opérateur, et on note $f(T)$ sa limite.

L'intérêt de ce genre de proposition est de pouvoir faire du calcul fonctionnel, i.e. donner un sens à des expressions comme e^A ou $\sin(A)$ lorsque A est une matrice carrée. Voici un autre exemple utile en pratique.

Proposition 1.2.3 *Soit E un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}_c(E, E)$ tel que $\|T\| < 1$. Alors $I - T$ est inversible dans $\mathcal{L}_c(E, E)$ et son inverse est donné par la somme de la série :*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} T^n.$$

1.3 Questions de compacité

On termine ce chapitre en rappelant quelques résultats liés à la compacité.

Définition 1.3.1 *Soit (X, d) un espace métrique. Une partie K de X est compacte ssi de toute suite déléments de K, on peut extraire une suite convergente dans K.*

La notion de compacité est liée à la continuité par la proposition **fondamentale** suivante.

Proposition 1.3.1 *Soit (X, d) un espace métrique et K un compact de X. Toute fonction continue $f : K \to \mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.*

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les compacts sont caractérisés :

Théorème 1.3.1 *Les compacts d'un espace normé de dimension finie sont les fermés bornés.*

En particulier, en dimension finie, toute boule $B_F(x, r)$ fermée est compacte. Ce résultat est **faux** en dimension infinie, et c'est même une propriété caractéristique des espaces de dimension finie comme en témoigne le théorème de Riesz :

Théorème 1.3.2 *Un espace vectoriel normé est de dimension finie ssi sa boule unité fermée est compacte.*

Un corollaire de ceci est qu'en dimension infinie, les compacts sont forcément d'interieur vide (donc pas bien gros). Les questions de compacité en dimension infinie sont en général liées à des variantes du théorème d'Ascoli, voir cours d'analyse fonctionnelle.

1.4 Notations de Landau

Il sera commode pour les prochains chapitres d'utiliser les notations suivantes. Soit E, F un espace normé et $a \in E$. Soit $f : E \to F$ et $g : E \to \mathbb{R}^+$, deux fonctions définies au voisinage de a. On dit que f est <u>*négligeable devant*</u> g lorsque x tend vers a, noté

$$f(x) = o(g(x))$$

ssi pour tout x voisin de a, il existe $\epsilon(x) \geq 0$ avec $\lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0$ tel que

$$\|f(x)\|_F \leq \epsilon(x) g(x).$$

On dit que f est *dominée par* g lorsque x tend vers a, noté

$$f(x) = O(g(x))$$

ssi il existe $M > 0$ tel que pour tout x voisin de a,

$$\|f(x)\|_F \leq Mg(x).$$

1.5 Exercices divers

Exercice 0
Soit E, F, G trois espaces normés, et $f : E \times F \to G$ une application bilinéaire. Montrer que f est continue ssi

$$\|f\| := \sup_{\|x\|_E \leq 1, \|y\|_F \leq 1} \|f(x,y)\|_G < +\infty.$$

Montrer que $\|.\|$ est une norme sur l'espace $\mathcal{L}_c(E, F; G)$ des applications bilinéaires continues. Montrer que $\mathcal{L}_c(E, F; G)$ est complet si G l'est.

Exercice 1.
Vérifier que

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \ \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2} \quad \text{et } \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

sont 3 normes équivalentes sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2.
Soit $(E, \|.\|)$ un espace normé, montrer que l'application "norme"

$$\begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \|x\| \end{cases}$$

est continue. Montrer que l'application $d : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

est aussi continue.

Exercice 3.
Les fonctions suivantes $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont-elles continues ?
Sinon, préciser pourquoi (à l'aide de suites etc.)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{1.1}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{1.2}$$

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+y)^2}{(x^2+y^2)} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{1.3}$$

$$w(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin x \sin y}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{1.4}$$

Exercice 4.

On munit $\mathbb{R}^n$ de $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, expliciter la norme d'opérateur associée sur

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \simeq \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Même question lorsque $\mathbb{R}^n$ est munit de $\|.\|_\infty$.

Exercice 5.
On considère l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ munit d'une norme d'opérateur $\|.\|$ au choix.

- Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|.\|)$.
- Montrer que "l'inversion"

$$\begin{cases} GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto M^{-1} \end{cases}$$

  est continue.

Exercice 6.
Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\exp(M) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M^n}{n!}$$

a bien un sens et définit une application continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui même. On pourra pour cela commencer par montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M \mapsto M^n$ est continue, puis utiliser un raisonnement de convergence uniforme.

Exercice 7.
Soit (X,d) un espace métrique compact et $\alpha > 0$. On dit que $f : X \to \mathbb{R}$ est α-Hölder sur X ssi

$$\sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^\alpha} < \infty.$$

On munit l'espace $C^\alpha(X)$ des fonctions α-Hölder sur X de la norme

$$\|f\|_\alpha := \sup_{x \in X} |f(x)| + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^\alpha}.$$

Montrer alors que $(C^\alpha(X), \|.\|_\alpha)$ est un espace de Banach.

Exercice 8.
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x_0) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$.

Chapitre 2

Calcul Différentiel

Ce chapitre constitue le coeur du cours. On y trouvera toutes les notions de base relatives à la différentiabilité dans les espaces vectoriels normés.

2.1 Différentiabilité

Définition 2.1.1 *Soient E, F deux espaces vectoriels normés, $\mathcal{U}$ un ouvert de E et*

$$f : \mathcal{U} \to F.$$

Soit $a \in \mathcal{U}$, f est dite différentiable au point a ssi il existe $L \in \mathcal{L}_c(E, F)$ telle que

$$f(a + h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|_E), \text{ lorsque } h \to 0.$$

Remarques. Si f est différentiable au point a, l'application L est unique et appelée *différentielle* ou *application linéaire tangente* à f au point a, on la note $d_a f$. Si f est différentiable en tout point de $\mathcal{U}$, on dit que f est différentiable sur $\mathcal{U}$. Si l'application

$$df : \begin{cases} \mathcal{U} \to \mathcal{L}_c(E, F) \\ a \mapsto d_a f \end{cases}$$

est continue ($\mathcal{L}_c(E, F)$ est muni de sa norme d'opérateur), on dit que f est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$. En dimension finie, l'existence d'une différentielle ne dépend pas du choix de la norme. Si $f : E \to F$ est une application linéaire continue, f est évidemment différentiable sur E et pour tout $x \in E$, $d_x f = f$, i.e. df est constante.

Proposition 2.1.1 *Une application différentiable en un point est continue en ce point.*

La réciproque est bien sur fausse, penser au cas de la dimension 1.

Définition 2.1.2 *Soient E, F deux espaces normés, $\mathcal{U}$ un ouvert de E et $f : \mathcal{U} \to F$. Soit $a \in \mathcal{U}$, $v \in E$, si la fonction de la variable réelle*

$$t \mapsto f(a + tv)$$

est dérivable en $t = 0$*, on dit que* f *est dérivable en* a *suivant la direction* v *et on note*

$$\partial_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \in F.$$

Proposition 2.1.2 *Si* $f : \mathcal{U} \to F$ *est différentiable en* $a \in \mathcal{U}$*, alors* f *est dérivable en* a *suivant toute direction* $v \in E$ *et*

$$\partial_v f(a) = d_a f(v).$$

La réciproque est fausse. La dérivabilité suivant toute direction n'implique même pas la continuité. Voir les exercices. Les propositions suivantes montrent essentiellement que somme, produit et composées de fonctions différentiables sont différentiables.

Proposition 2.1.3 *Soient* E, F *deux espaces normés,* $\mathcal{U}$ *un ouvert de* E *et* $f, g : \mathcal{U} \to F$*. Soient* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*, si* f, g *sont différentiables en* $a \in \mathcal{U}$ *alors* $\lambda f + \mu g$ *est différentiable en* a *et on a la formule*

$$d_a(\lambda f + \mu g) = \lambda d_a f + \mu d_a g.$$

Proposition 2.1.4 *Soit* E *un espace normé,* $\mathcal{U} \subset E$ *un ouvert et* $f, g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$*. Si* f, g *sont différentiables en* $a \in \mathcal{U}$ *alors* fg *est différentiable en* a *et on a*

$$d_a(fg) = f(a) d_a g + g(a) d_a f.$$

Proposition 2.1.5 *Soient* E, F, G *trois espaces normés et* $\mathcal{U}$ *un ouvert de* E*,* $\mathcal{V}$ *un ouvert de* F*. Soient* $f : \mathcal{U} \to F$ *et* $g : \mathcal{V} \to G$ *tels que* $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$*. Si* f *est différentiable en* $a \in \mathcal{U}$ *et* g *différentiable en* $f(a)$ *alors* $g \circ f$ *est différentiable en* a *et on a*

$$d_a(g \circ f) = (d_{f(a)} g) \circ (d_a f).$$

Définition 2.1.3 *Soit* E *un espace normé,* $\mathcal{U}$ *et* $\mathcal{V}$ *deux ouverts de* E *et* $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ *une application. On dit que* f *est un* <u>C^1*-difféomorphisme de* $\mathcal{U}$ *sur* $\mathcal{V}$</u> *ssi* $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ *est une bijection de classe* C^1 *sur* $\mathcal{U}$ *dont l'inverse* f^{-1} *est de classe* C^1 *sur* $\mathcal{V}$*. Pour tout* $x \in \mathcal{U}$*,* $d_x f$ *est alors inversible dans* $\mathcal{L}_c(E, E)$ *et on a pour tout* $y \in \mathcal{V}$*,*

$$d_y(f^{-1}) = (d_{f^{-1}(y)} f)^{-1}.$$

Ainsi la différentielle d'une application réciproque se déduit de la différentielle de l'application directe par inversion. On peut vérifier qu'en dimension 1 on retrouve la formule usuelle. Enoncons maintenant un résultat fondamental de topologie des espaces normés.

Théorème 2.1.1 *Soit* E *un espace normé et* $\mathcal{U}$ *un ouvert de* E*. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

- *L'ouvert* $\mathcal{U}$ *est connexe.*
- *L'ouvert* $\mathcal{U}$ *est connexe par arcs.*
- *L'ouvert* $\mathcal{U}$ *est connexe par lignes brisées.*

On rappelle qu'un *arc* joignant $x, y \in \mathcal{U}$ est une application *continue* $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathcal{U}$ telle que $\gamma(a) = x$ et $\gamma(b) = y$. Une *ligne brisée* γ dans $\mathcal{U}$ joignant x à y est un arc linéaire par morceaux : il existe une subdivision finie $t_0 = a < t_1 < \ldots < t_p = b$ de l'intervalle $[a, b]$ et $p+1$ vecteurs $x_0 = x, x_1, \ldots, x_p = y \in \mathcal{U}$ tels que pour tout $0 \leq i \leq p-1$, $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset \mathcal{U}$ avec

$$\gamma|_{[t_i,t_{i+1}[}(t) = \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} x_i - \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} x_{i+1}.$$

La longueur de γ est $\sum_{i=0}^{p-1} \|x_i - x_{i+1}\|$. On peut alors définir, si $\mathcal{U}$ est un ouvert connexe, la distance $d_{\mathcal{U}}(x, y)$ comme étant la borne inf. des longueurs des lignes brisées dans $\mathcal{U}$ joignant x à y. Ces définitions sont motivées par le théorème fondamental suivant (dit *des accroissements finis*).

Théorème 2.1.2 *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe d'un espace vectoriels normé E, et soit $f : \mathcal{U} \to F$ une application différentiable. Supposons qu'il existe $M \geq 0$ tel que $\sup_{x \in \mathcal{U}} \|d_x f\| \leq M$, alors pour tout $x, y \in \mathcal{U}$, on a*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M d_{\mathcal{U}}(x, y).$$

Ce théorème a deux corollaires importants.

Corollaire 2.1.1 *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert <u>convexe</u> d'un espace vectoriel normé E, et soit $f : \mathcal{U} \to F$ une application différentiable. Supposons qu'il existe $M \geq 0$ tel que $\sup_{x \in \mathcal{U}} \|d_x f\| \leq M$, alors pour tout $x, y \in \mathcal{U}$, on a*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|.$$

Corollaire 2.1.2 *Soit F un espace vectoriel normé et $f : [a, b] \to F$ continue, dérivable sur $]a, b[$. Supposons qu'il existe $M \geq 0$ tel que $\sup_{x \in]a,b[} |f'(x)| \leq M$, alors*

$$\|f(a) - f(b)\| \leq M|a - b|.$$

2.2 Calcul en dimension finie

On suppose dans cette section que E est de dimension finie n, ce qui modulo le choix d'une base revient à dire que $E = \mathbb{R}^n$. On notera $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $(dx_1, \ldots, dx_n)$ sa base duale où $dx_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ avec

$$dx_i(h_1, \ldots, h_n) = h_i.$$

2.2.1 Dérivées partielles

Proposition 2.2.1 *Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to F$ une application différentiable en $a \in \mathcal{U}$, où est un ouvert. On note la dérivée de f en a suivant e_i sous la forme $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in F$. On l'appelle dérivée partielle i-ème de f en a. On a alors la formule*

$$d_a f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i.$$

Comme on l'a fait remarquer précédemment, l'existence des n dérivées partielles en a n'implique absolument pas la différentiabilité. On a en revanche le résultat suivant trés utile en pratique. La preuve est basée sur l'inégalité des accroissements finis.

Théorème 2.2.1 *Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to F$, où $\mathcal{U}$ est un ouvert. Si toutes les dérivées partielles de f existent au voisinage et sont continues en un point $a \in \mathcal{U}$, alors f est différentiable en a et $d_a f$ est donnée par la formule précédente. Si les conditions précédentes sont vérifiées pour tout $a \in \mathcal{U}$, f est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$.*

Ce théorème permet de ramener l'étude de la différentiabilité à des simples problèmes de continuité. Il est d'usage constant dans tous les problèmes usuels. Dans le cas où F est lui aussi de dimension finie, on peut préciser les écritures.

Proposition 2.2.2 *Soit $f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to R^m$ différentiable en $a \in \mathcal{U}$. On appelle matrice jacobienne $J_a f$ de f au point a, la matrice de $d_a f$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$. On a alors*

$$J_a f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix},$$

et pour tout $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, $d_a f(h) = (J_a f)(\,{}^t h)$.

Le théorème de composition précisé en dimension finie donne lieu à une règle de calcul dite "règle de la chaine".

Proposition 2.2.3 *Soit $f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $g : \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ avec $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ ouverts tels que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$. Si f est différentiable en $a \in \mathcal{U}$ et g est différentiable en $f(a)$, alors on calcule les dérivées partielles de $g \circ f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ par la formule*

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_i}(f(a)) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a).$$

2.2.2 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to F$ une application. Si cela a un sens, on peut définir par récurrence des dérivées partielles d'ordre supérieur p par

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \ldots \partial x_{i_1}} := \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} \left(\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_{p-1}} \ldots \partial x_{i_1}} \right),$$

où $(i_1, \ldots, i_p) \in \{1, \ldots, n\}^p$. Vu la lourdeur des notations, on préfère parfois adopter une notation multi-indicielle en posant $\alpha = (i_1, \ldots, i_p) \in \{1, \ldots, n\}^p$, $p = |\alpha|$ et en notant

$$\mathcal{D}^\alpha f := \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \ldots \partial x_{i_1}}.$$

Une fonction $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to F$ est dite de classe C^p sur $\mathcal{U}$ ssi toutes les dérivées partielles $\mathcal{D}^\alpha f$ avec $|\alpha| \leq p$ existent et sont continues sur $\mathcal{U}$. Remarquer qu'a priori, l'ordre dans lequel on effectue les dérivations successives a son importance. On a toutefois le théorème suivant (dit de Schwarz).

Théorème 2.2.2 *Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ avec $\mathcal{U}$ ouvert, et $a \in \mathcal{U}$ tel que*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad et \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

existent au voisinage de a et sont continues en a. Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a).$$

L'hypothèse de continuité en a est importante, il existe des contre-exemples, voir exercices. Un corollaire bien utile pour nous est le suivant.

Corollaire 2.2.1 *Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to F$, avec F de dimension finie, une application de classe C^p sur $\mathcal{U}$, alors les dérivées partielles $\mathcal{D}^\alpha f$ jusqu'à l'ordre p ne dépendent pas de l'ordre de dérivation.*

On dit qu'une fonction est de classe C^∞ ssi elle est de classe C^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

2.3 Différentielle seconde et au-delà

Se donnant $\mathcal{U}$ un ouvert d'un espace normé E et $f : \mathcal{U} \to F$ (où F est normé) de classe C^1, on peut se demander si $df : \mathcal{U} \to \mathcal{L}_c(E, F)$ est à son tour différentiable, auquel cas la différentielle de df serait une application

$$d(df) : \mathcal{U} \to \mathcal{L}_c\left(E, \mathcal{L}_c(E, F)\right).$$

Les choses sont heureusement plus simples qu'il n'y parait grâce à la proposition suivante.

Proposition 2.3.1 *Soient E, F deux espaces normés. On note $\mathcal{L}_c(E, E; F)$ l'espace des applications bilinéaires continues de $E \times E \to F$ muni de sa norme naturelle*[1]*. L'espace vectoriel $\mathcal{L}_c\left(E, \mathcal{L}_c(E, F)\right)$ est muni de sa norme d'opérateur. L'application*

$$\begin{cases} \mathcal{L}_c(E, E; F) \longrightarrow \mathcal{L}_c\left(E, \mathcal{L}_c(E, F)\right) \\ \qquad f \mapsto \left\{ \begin{smallmatrix} E \to \mathcal{L}_c(E,F) \\ x \mapsto f(x,.) \end{smallmatrix} \right. \end{cases}$$

est un isomorphisme isométrique dit "canonique à gauche".

Ceci nous mène aux définitions.

Définition 2.3.1 *Soient E, F deux espaces normés, et $f : \mathcal{U} \to F$ une application C^1. f est dite deux fois différentiable en $a \in \mathcal{U}$ ssi $df : \mathcal{U} \to \mathcal{L}_c(E, F)$ est différentiable en a. On note alors*

$$d_a^2 f := d_a(df).$$

Si f est deux fois différentiable sur $\mathcal{U}$ et si $x \mapsto d_x^2 f$ est continue, f est dite de classe C^2.

[1] Voir exercice 9 du chapitre précédent.

Remarquer que $d_x^2 f \in \mathcal{L}_c\left(E, \mathcal{L}_c(E,F)\right)$ ainsi pour tout $h \in E$, $d_x^2 f(h) \in \mathcal{L}_c(E,F)$. L'application

$$(h,k) \mapsto (d_x^2 f)(h)(k)$$

est bilinéaire et on note aussi cela par $d_x^2 f(h,k)$. Noter que la place de h et k a *a priori* de l'importance. On laisse au lecteur le soin de vérifier que combinaisons linéaires, composées et produit de fonctions C^2 sont C^2 quand cela a un sens.

Théorème 2.3.1 *Si $f : \mathcal{U} \to F$ est deux fois différentiable en $x \in \mathcal{U}$, alors pour tout $(h,k) \in E^2$,*

$$(d_x^2 f)(h,k) = (d_x^2 f)(k,h),$$

i.e. la différentielle seconde en x est bilinéaire symétrique.

En pratique, le cas de la dimension finie s'étudie à l'aide du résultat suivant.

Proposition 2.3.2 *Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to F$ deux fois différentiable en $x \in U$. Alors les derivées partielles d'ordre deux en x existent et pour tout $h, k \in \mathbb{R}^n$, on a*

$$(d_x^2 f)(h,k) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_i k_j.$$

L'application f est C^2 en x ssi les derivées partielles d'ordre deux existent au voisinage de x et sont continues en x.

La proposition précédente montre qu'en dimension finie, les deux définitions que nous avons données sont bien les mêmes. Le théorème 2.3.1 combiné au résultat précédent montre que si f est deux fois différentiable, alors les dérivées croisées existent et sont égales. C'est une autre version du théorème de Schwarz vu plus haut. L'interêt du calcul différentiel d'ordre deux est pleinement justifié par le théorème suivant.

Théorème 2.3.2 *(Formule de Taylor-Young) Soit $f : \mathcal{U} \to F$ deux fois différentiable en $x \in \mathcal{U}$. Alors pour tout $h \in E$ voisin de 0, on a*

$$f(x+h) = f(a) + (d_x f)(h) + \frac{1}{2}(d_x^2 f)(h,h) + o(\|h\|^2).$$

L'expression ci-dessus précise le comportement local de f au voisinage de x, c'est ce qu'on appelle un développement limité à l'ordre 2. On peut généraliser ces définitions par récurrence à l'ordre quelconque : f sera dite de classe C^n si elle est C^{n-1} et si la différentielle $n-1$-ième est continuement différentiable. La différentielle n-ième de f, notée $d_x^n f$ est alors une application multilinéaire symétrique de $E^n \to F$. Dire que f est C^n revient à dire en dimension finie que toutes les dérivées partielles j'usqu'a l'ordre n existent et sont continues, ce qui est la définition donnée plus haut. On peut de même démontrer une formule de Taylor à l'ordre quelconque analogue à celle vue plus haut. Il existe aussi d'autres formules de Taylor, de nature plus globale. Contentons nous d'énoncer ici la formule la plus utile en pratique, celle de dite de *Taylor avec reste intégral.*

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ une fonction de classe C^k, $a \in \mathcal{U}$ et $h \in \mathbb{R}^p$. On appelle puissance symbolique d'ordre n $(1 \leq n \leq k)$ l'expression

$$\left[\sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right]^{[n]} := \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_p=n} \frac{n!}{i_1!\ldots i_p!} h_1^{i_1}\ldots h_p^{i_p} \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{i_1}\ldots \partial x_p^{i_p}}(a).$$

Théorème 2.3.3 *Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ une fonction de classe C^k, $a \in \mathcal{U}$ et $h \in \mathbb{R}^p$ tel que le segment $[a, a+h] \subset \mathcal{U}$. Alors on a*

$$f(a+h) = f(a) + \left[\sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right] + \frac{1}{2!}\left[\sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right]^{[2]} + \ldots + \frac{1}{(k-1)!}\left[\sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right]^{[k-1]}$$
$$+ \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!}\left[\sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th)\right]^{[k]} dt.$$

L'interêt de la formule précédente est qu'elle n'est pas seulement valable localement, mais vaut pour tout h tel que $[a, a+h] \subset \mathcal{U}$.

2.4 Recherche d'extremums locaux

Dans ce qui suit $\mathcal{U}$ désignera a priori un ouvert d'un espace normé E.

Définition 2.4.1 *Soit E un espace normé et $f : \mathcal{U} \subset E \to \mathbb{R}$ une application. Soit $a \in \mathcal{U}$. On dit que f admet un minimum local (ou relatif) en a ssi il existe $\mathcal{V}$ voisinage de a tel que pour tout $x \in \mathcal{V}$,*

$$f(x) \geq f(a).$$

On dit que f admet un minimum local strict (ou relatif strict) en a ssi il existe $\mathcal{V}$ voisinage de a tel que pour tout $x \in \mathcal{V}$ avec $x \neq a$,

$$f(x) > f(a).$$

On a des définition analogues pour maximum local et maximum local strict en renversant les inégalités.

Théorème 2.4.1 *Si $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in \mathcal{U}$ et si a est un minimum ou maximum local, alors*

$$d_a f = 0.$$

La réciproque est bien sur fausse. Il est trés important que $\mathcal{U}$ soit un ouvert. Lorsque $d_a f = 0$ on dit que a est un point critique de f.

Si $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est bilinéaire symétrique, pour tout $h \in E$, on pose

$$\mathcal{Q}[\varphi](h) := \varphi(h, h).$$

L'application $\mathcal{Q}[\varphi]$ est appelée forme quadratique associée à φ.

Définition 2.4.2 *On dit que $\mathcal{Q}[\varphi]$ est positive ssi pour tout $h \in E$,*

$$\mathcal{Q}[\varphi](h) \geq 0.$$

On a une définition analogue pour négative.

Définition 2.4.3 *On dit que $\mathcal{Q}[\varphi]$ est définie ssi l'application*

$$\begin{cases} E \to E^* \\ x \mapsto \varphi(x, .) \end{cases}$$

est un isomorphisme bicontinu entre E et son dual topologique E^*.

Proposition 2.4.1 *Si E est de dimension finie, $\mathcal{Q}[\varphi]$ est définie positive ssi pour tout $h \in E \setminus \{0\}$,*

$$\mathcal{Q}[\varphi](h) > 0.$$

Proposition 2.4.2 *Si $\mathcal{Q}[\varphi]$ est définie positive, alors il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $h \in E$,*

$$\mathcal{Q}[\varphi](h) \geq \lambda \|h\|^2.$$

Si $\mathcal{Q}[\varphi]$ est définie négative, on a les mêmes résultats en renversant les inégalités.

Théorème 2.4.2 *Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{U}$ et f deux fois différentiable en a.*
- *Si f admet un minimum local en a, alors $\mathcal{Q}[d_a^2 f]$ est positive.*
- *Si $\mathcal{Q}[d_a^2 f]$ est définie positive, alors f admet un minimum local strict en a.*

L'intérêt principal du théorème précedent est de donner une condition suffisante du second ordre pour avoir un extremum local. En dimension finie, la différentielle seconde de f est donnée par la matrice Hessienne de f : pour tout $h = {}^t(h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$d_a^2 f(h, h) = {}^t h H_a h,$$

où

$$H_a = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}.$$

La matrice H_a étant réelle symétrique, elle est diagonalisable en base orthomormée i.e. il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $H_a = {}^t PDP$ où D est diagonale. Il est alors clair que $\mathcal{Q}[d_a^2 f]$ est définie positive ssi toutes les valeurs propres de H_a sont strictement positives. Ceci conduit en dimension 2 au critère de Monge pour étudier la nature des points critiques.

Théorème 2.4.3 *Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable en $a \in \mathcal{U}$, point critique de f. Posons*

$$R = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), \; S = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a), \; T = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a).$$

- *Si $RT - S^2 > 0$ et $R > 0$, f a un minimum local strict en a.*
- *Si $RT - S^2 > 0$ et $R < 0$, f a un maximum local strict en a.*
- *Si $RT - S^2 < 0$, f n'a pas d'extremum local en a, c'est un point selle ou col.*
- *Si $RT - S^2 = 0$ on ne peut conclure, c'est un point critique dit dégénéré.*

2.5 Exercices

Exercice 1.
L'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^2 \sin\left(\frac{1}{t}\right) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

est-elle continue, différentiable, C^1 ?

Exercice 2.
Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est dérivable dans toutes les directions en $(0, 0)$ sans même être continue en $(0, 0)$.

Exercice 3.
Les applications suivantes $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont-elles différentiables, C^1 ?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \tag{2.1}$$

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin y}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ x & \text{si } y = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

$$h(x, y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Exercice 4.
Soit $\|.\|$ une norme sur un espace vectoriel normé E. Montrer que $\varphi : x \mapsto \|x\|$ n'est pas différentiable en 0.

Exercice 5.
Soient E, F, G trois espaces normés et $\psi : E \times F \to G$ une application bilinéaire continue. Montrer que ψ est de classe C^1 et calculer sa différentielle. Application :
- Soit $(H, \langle ., . \rangle)$ un espace préhilbertien réel, et $f : H \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = \langle x, x \rangle^{1/2}$. Montrer que f est C^1, donner sa différentielle.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $M \mapsto M^n$ est C^1 et calculer sa différentielle.

Exercice 6.
Montrer que

$$\phi : \begin{cases}]0,+\infty[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus ([0,+\infty[\times\{0\}) \\ (r,\theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{cases}$$

est un C^1-difféomorphisme, expliciter pour cela son inverse.

Exercice 7.
Soit E, F deux espaces normés et $\mathcal{U} \subset E$ un ouvert connexe. On considère $f : \mathcal{U} \to F$ différentiable et telle que pour tout $x \in \mathcal{U}$, $d_x f = 0$. Montrer que f est constante.

Exercice 8.
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application différentiable en 0, et telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, pour tout $t > 0$,

$$f(tx) = tf(x).$$

Montrer que f est linéaire.

Exercice 9.
Montrer que l'application

$$\mathcal{I} : \begin{cases} GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto M^{-1} \end{cases}$$

est de classe C^1, expliciter sa différentielle.

Exercice 9 bis.
Montrer que l'application

$$\mathcal{I} : \begin{cases} GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto M^{-1} \end{cases}$$

est de classe C^2, expliciter sa différentielle seconde. Généraliser à l'ordre quelconque.

Exercice 10.
Montrer que l'application

$$\phi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto \exp(M) \end{cases}$$

est de classe C^1, calculer sa différentielle. On pourra cela commencer par étudier le cas de $M \mapsto M^n$ (voir exercice 5) et utiliser le résultat de l'exercice 12.

Exercice 11.
Montrer que l'application

$$\psi : \begin{cases} GL_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ (A,B) \mapsto \mathrm{Tr}\,(A^{-1}B^2) \end{cases}$$

est de classe C^1, calculer sa différentielle.

Exercice 11 bis.
Montrer que l'application
$$\psi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ M \mapsto \det(M) \end{cases}$$
est de classe C^1, calculer sa différentielle.

Exercice 12.
Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe et $(f_n)_{n\in N} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions différentiables telle que
- Il existe $a \in \mathcal{U}$ tel que $(f_n(a))$ soit convergente.
- La suite (df_n) converge uniformément sur $\mathcal{U}$ vers $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Montrer que (f_n) tend uniformément sur $\mathcal{U}$ vers g différentiable sur $\mathcal{U}$ et $dg = \lim_{n\to+\infty} df_n$.

Exercice 13.
Montrer que la formule
$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+(x-n)^2+(y-n)^2}$$
définit une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, calculer ses dérivées partielles.

Exercice 14.
Soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ différentiable telle que pour tout $t > 0$, on ait $f(tx) = t^\alpha f(x)$ où $\alpha > 0$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,
$$d_x f(x) = \alpha f(x).$$

Exercice 15.
Soit E l'espace de Banach des fonctions numériques continues sur $[0,1]$, munit de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Montrer que la fonctionnelle
$$T : \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_0^1 |f(t)|^2 dt \end{cases}$$
est de classe C^1 sur E, et calculer sa différentielle.

Exercice 16.
Soit E l'espace de Banach des fonctions numériques continues sur $[0,1]$, toujours munit de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Soit $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que l'application $P : E \to E$ définie par
$$P(f)(x) = \int_0^1 K(x,t) \exp(f(t)) dt$$
est de classe C^1 sur E, calculer sa différentielle.

Exercice 17.
Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est de classe C^1. Montrer que les dérivées secondes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

existent mais ne sont pas égales.

Exercice 18.
On notera φ le changement de coordonnées

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta)). \end{cases}$$

Soit f de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, on appelle *Laplacien* de f la fonction

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Montrer que pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$,

$$(\Delta f) \circ \varphi(r,\theta) = \frac{\partial^2 (f\circ\varphi)}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial (f\circ\varphi)}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 (f\circ\varphi)}{\partial \theta^2}(r,\theta).$$

Exercice 19.
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que

$$\frac{\partial f}{\partial x} + 2x\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Utiliser pour cela le difféomorphisme $\varphi(x,y) = (x, y+x^2)$.

Exercice 20.
Soient $a < b$ deux réels et I un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Soit $(t,x) \mapsto f(t,x)$ une fonction numérique définie au voisinage de $[a,b] \times I$, et telle que $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $[a,b] \times I$. On note $\varphi : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\varphi(x) = \int_a^b f(t,x)dt.$$

– Montrer que φ est continue.

– montrer que φ est C^1 et que pour tout $x \in I$,

$$\varphi'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt.$$

Enoncer un théorème plus général où la variable x vit dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 21.
Montrer à l'aide d'exercices précédents que la formule

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$$

définit une fonction Γ de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 22.
Etudier les extremums locaux puis globaux de

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^4 + y^4 - 2(x-y)^2. \end{array} \right.$$

Exercice 23.
Même chose avec

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 2. \end{array} \right.$$

Exercice 24.
Même chose avec

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & (x - z^2)e^{-(x^2+y^2)/2}. \end{array} \right.$$

Exercice 25.
Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. On note

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\| < 1\} \text{ et } \partial B = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\| = 1\}.$$

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable telle que $f|_{\partial B}$ soit constante. Montrer qu'il existe $x_0 \in B$ tel que $d_{x_0}f = 0$.

Exercice 26.
Soit E un espace vectoriel normé, $U \subset E$ un ouvert convexe, et $f : U \to \mathbf{R}$ une fonction différentiable. On dit que f est convexe si, pour tous $x, y \in U$ et tout $t \in [0,1]$, on a :

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

1. Montrer que f est convexe si et seulement si elle satisfait, pour tous $x, x_0 \in U$:

$$f(x) \geq f(x_0) + d_{x_0}f(x - x_0).$$

2. On suppose que f est convexe. Montrer que si $d_{x_0}f = 0$, alors f admet en x_0 un minimum absolu, puis que l'ensemble des points où df s'annule est un convexe sur lequel f est constante.

Exercice 27.
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2. On notera le *Laplacien* par

$$\Delta f := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

1. Montrer que si $\Delta f > 0$ sur B, alors on a pour tout $x \in B$,

$$f(x) < \sup_{y \in \partial B} f(y).$$

2. Montrer que si $\Delta f = 0$ sur B, alors pour tout $x \in B$,

$$\inf_{y \in \partial B} f(y) \leq f(x) \leq \sup_{y \in \partial B} f(y).$$

Exercice 28.
Soient E et F des espaces vectoriels normés.
- Montrer que $f : E \to F$ de classe C^2 est affine si et seulement si on a : $\forall x \in E, d_x^2 f = 0$.
- Soit $B \in \mathcal{L}^2(E, F)$. Trouver toutes les fonctions $f : E \to F$ de classe C^2 telles que pour tout $x \in E$, $d_x^2 f = B$.

Exercice 29.
Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ de classe C^2. Calculer $d_x^2(g \circ f)$.

Chapitre 3

Inversion locale, fonctions implicites

Ce petit chapitre est consacré à deux théorèmes fondamentaux du calcul différentiel dont les applications à l'analyse et la géométrie différentielle sont nombreuses. Commencons par rappeler le *théorème du point fixe* dans les espaces complets qui est l'outil central de la preuve du théorème d'inversion locale.

Théorème 3.0.1 *Soit (X, d) un espace métrique complet, et soit $f : X \to X$ une application k-contractante ($0 < k < 1$) i.e. pour tout $x, y \in X$,*

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Alors f admet un unique point fixe dans X.

3.1 L'inversion locale

La différentielle d'une fonction en un point étant une approximation linéaire de celle ci au voisinage de ce point, il est raisonnable de penser que les propriétés de cette diférentielle en ce point (injectivité, surjectivité, rang) impliquent des propriétés locales de cette fonction. C'est ce qu'affirme le théorème suivant.

Théorème 3.1.1 *Soient E, F deux espaces de Banach, $\mathcal{U}$ un ouvert de E et $f : \mathcal{U} \to F$ une application C^1. Si $a \in \mathcal{U}$ est tel que $d_a f : E \to F$ est un isomorphisme bicontinu, alors il existe un ouvert $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ contenant a et un ouvert $\mathcal{W}$ contenant $f(a)$ tels que $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ soit un C^1-difféomorphisme.*

En d'autres termes, si $d_a f$ est inversible, alors f l'est aussi localement. Ce résultat n'a bien sur aucune valeur globale. On a toutefois le corollaire suivant, dit théorème d'inversion globale.

Corollaire 3.1.1 *Soient E, F deux espaces de Banach, $\mathcal{U}$ un ouvert de E et $f : \mathcal{U} \to F$ une application* **injective** *de classe C^1. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
- *$\mathcal{V} = f(\mathcal{U})$ est un ouvert et $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ est un C^1-difféomorphisme.*
- *Pour tout $x \in \mathcal{U}$, $d_x f$ est un isomorphisme bicontinu.*

L'hypothése d'injectivité est importante, il existe des contre-exemples, voir exercices. Dans le cas de la dimension finie, on peut aisément préciser les questions de régularité.

Proposition 3.1.1 *Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^p avec $p \geq 1$. Si $a \in \mathcal{U}$ est tel que $d_a f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme alors il existe un ouvert $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ contenant a et un ouvert $\mathcal{W}$ contenant $f(a)$ tels que $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ soit un C^p-difféomorphisme, i.e. $f^{-1} : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ existe et est C^p.*

On peut de même énoncer un résultat d'inversion globale en classe C^p.

Corollaire 3.1.2 *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ une application* **injective** *de classe C^p. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *$\mathcal{V} = f(\mathcal{U})$ est un ouvert et $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ est un C^P-difféomorphisme.*
- *Pour tout $x \in \mathcal{U}$, $d_x f$ est un isomorphisme bicontinu.*

3.2 Fonctions implicites

Soient E_1, E_2, F trois espaces de Banach, $\mathcal{U} \subset E_1 \times E_2$ un ouvert, et $f : \mathcal{U} \to F$ une application. On dit que f admet une *différentielle partielle* par rapport à la première variable au point $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$ ssi l'application partielle $f_{y_0} : x \mapsto f(x, y_0)$ est différentiable en x_0. On note

$$\partial_1 f(x_0, y_0) := d_{x_0} f_{y_0}.$$

On a une définition analogue pour la deuxième variable.

Théorème 3.2.1 *Soient E_1, E_2, F trois espaces de Banach, $\mathcal{U} \subset E_1 \times E_2$ un ouvert, et $f : \mathcal{U} \to F$ une application C^1. Soit $(a, b) \in \mathcal{U}$ tel que $f(a, b) = 0$ et supposons que $\partial_2 f(a, b)$ est un isomorphisme bicontinu de E_2 sur F. Il existe un ouvert $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ contenant (a, b), un ouvert $\mathcal{W}$ de E_1 contenant a, une application C^1, $g : \mathcal{W} \to E_2$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathcal{V}$,*

$$f(x, y) = 0 \text{ ssi } x \in \mathcal{W} \text{ et } y = g(x).$$

Le théorème des fonctions implicites montre essentiellement que l'ensemble des solutions de $f(x, y) = 0$ peut être localement vu comme le graphe $\{(x, g(x)) \;:\; x \in \mathcal{W}\}$ d'une fonction C^1, pourvu que la différentielle partielle par rapport à la deuxième variable soit un isomorphisme bicontinu. On peut preciser cet énoncé en dimension finie.

Théorème 3.2.2 *Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ un ouvert, et*

$$f : (x_1, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_q) \mapsto (f_1(x; y), \ldots, f_q(x; y)) \in \mathbb{R}^q$$

une application C^k, $k \geq 1$. Soit $(a, b) \in \mathcal{U}$ tel que $f(a, b) = 0$ et supposons que

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a; b) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial y_q}(a; b) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial y_1}(a; b) & \ldots & \frac{\partial f_q}{\partial y_q}(a; b) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Il existe un ouvert $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ contenant (a, b), un ouvert $\mathcal{W}$ de $\mathbb{R}^p$ contenant a, une application C^k, $g : \mathcal{W} \to \mathbb{R}^q$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathcal{V}$,

$$f(x, y) = 0 \textit{ ssi } x \in \mathcal{W} \textit{ et } y = g(x).$$

Ce théorème est trés utilisé avec $q = 1$ et $p = 1, 2$. Il montre que les courbes de $\mathbb{R}^2$ et les surfaces de $\mathbb{R}^3$ définies "implicitement" par une équation du type $f(x, y) = 0$ sont localement des courbes et des surfaces paramétrées. Il est aussi possible de calculer les dérivées partielles de g, par exemple si $q = 1$ et $p = 2$ on a au voisinage de a,

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}, \ \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}.$$

En itérant ces calculs, on peut calculer des développements limités de g au voisinage de a.

3.3 Exercices

Exercice 1.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Montrer que f est un C^∞-difféomorphisme local au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Est-ce un difféomorphisme global ?

Exercice 2.
Même questions avec $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$.

Exercice 3.
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tel que $f - Id$ soit k-contractante avec $0 < k < 1$. Montrer que f est un C^1-difféomorphisme global.

Exercice 4.
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y).$$

Montrer que f est un C^∞-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $f(\mathbb{R}^3)$ que l'on explicitera.

Exercice 5.
L'espace $C^0([0, 1])$ est munit de $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$ et $C^1([0, 1])$ est munit de

$$\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Montrer que l'application

$$\varphi : \begin{cases} C_0^1([0, 1]) \to C^0([0, 1]) \\ \quad f \mapsto f' + f^2 \end{cases}$$

est un C^1-difféomorphisme local au voisinage de 0, où $C_0^1([0, 1])$ désigne

$$\{f \in C^1([0, 1]) \ : \ f(0) = 0\}.$$

Exercice 6.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \sin(y) + xy^4 + x^2$. Montrer qu'il existe $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ (où $\mathcal{U}$ est un ouvert contenant 0) telle que pour tout $x \in \mathcal{U}$, $\varphi(x)$ est l'unique solution y de $f(x,y) = 0$. Donner un développement limité à l'ordre 6 en 0 de φ.

Exercice 7.
Montrer que $y^3 + y + x = 0$ définit implicitement y en fonction de x et que $\varphi : x \mapsto y = \varphi(x)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8.
Même chose avec $y^3 + (x^2+1)y + x^4 = 0$.

Exercice 9.
Calculer les dérivées partielles premières de $\varphi : (x,y) \mapsto z$ définie implicitement au voisinage de $(2, -e)$ par

$$\ln z = x + y + z - 1.$$

Exercice 10.
Montrer que $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^3 + y^3 + 3xy - 1\}$ est au voisinage de $(0,1)$ le graphe d'une fonction $\varphi : x \mapsto y$ avec $\varphi(0) = 1$. Donner un développement limité à l'ordre 3 de φ en 0. Dessiner Γ au voisinage de $(0,1)$.

Problème
Soit E un espace euclidien de dimension finie. On notera $(x|y)$ le produit scalaire sur E et $\|x\| = (x|x)^{1/2}$ la norme euclidienne associée. Dans ce qui suit f désigne une application de classe C^1 de E dans lui-même telle que pour tout $x \in E$ et tout $h \in E$ on ait

$$(d_x f(h)|d_x f(h)) = (h|h).$$

1. Montrer que pour tout $(x,y) \in E^2$, on a $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$.
2. Montrer que pour tout $a \in E$, il existe un voisinage U_a de a tel que la restriction de f à U_a est un difféomorphisme de classe C^1 de U_a sur $f(U_a)$.
3. En déduire qu'il existe un voisinage ouvert $V_a \subset U_a$ tel que la restriction de f à V_a vérifie pour tout $(x,y) \in V_a^2$,
$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$
4. Pour tout $(x,y) \in V_a^2$, on pose
$$\varphi(x,y) = \|f(x) - f(y)\|^2.$$
Montrer que la dérivée partielle $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x,y)$ existe sur V_a^2. En déduire que pour tout $(x,y) \in V_a^2$ et pour tout $(h,k) \in E^2$,
$$(d_x f(h)|d_y f(k)) = (h|k).$$

5. Soit $h \in E$. Calculer $\|d_x f(h) - d_y f(h)\|^2$ pour tout $x, y \in V_a$. En conclure que la différentielle de f est constante sur V_a.
6. Montrer que la différentielle de f est constante sur E. En déduire que f est une isométrie affine, i.e. il existe une application linéaire $A : E \to E$ préservant les distances et $x_0 \in E$ tel que pour tout $x \in E$,
$$f(x) = A(x) + x_0.$$
7. Montrer que f est un C^∞-difféomorphisme de E sur E.

Chapitre 4

Equations différentielles

Ce chapitre est consacré aux équations différentielles dites “ordinaires”. On y trouvera les théorèmes usuels d'existence et d'unicité ainsi que quelques méthodes classiques d'étude qualitative. Une section complète est dédiée aux équations linéaires et aux méthodes de résolution spécifiques.

4.1 Définitions et terminologie

Définition 4.1.1 *Soient k, p des entiers, et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p \times \ldots \times \mathbb{R}^p = (\mathbb{R}^p)^k$ un ouvert, et $F : I \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$ une application. On appelle solution de l'équation différentielle résolue d'ordre k*

$$y^{(k)} = F(t, y, y', \ldots, y^{(k-1)}) \tag{4.1}$$

tout couple (J, y) où

1. *$J \subset I$ est un intervalle non-trivial.*
2. *$y : J \to \mathbb{R}^p$ est une fonction k-fois dérivable sur J.*
3. *Pour tout $t \in J$, $(y(t), y'(t), \ldots, y^{(k-1)}(t)) \in \mathcal{U}$, et*

$$y^{(k)}(t) = F(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(k-1)}(t)).$$

A priori, l'intervalle d'existence J d'une solution (J, y) n'est pas égal à I. Considérer par exemple l'équation $y' = y^2$ qui entre dans le cadre précédent avec $k = 1,\ p = 1$, $I = \mathbb{R}$ et $F(t, y) = y^2$, alors pour tout $x_0 \neq 0$, la fonction

$$y_0(t) = \frac{x_0}{x_0(t_0 - t) + 1}$$

vérifie l'équation, mais n'est pas définie sur $\mathbb{R}$, bien que $I = \mathbb{R}$. Ceci nous mène à la notion de solution maximale.

Définition 4.1.2 *Une solution (J, y) de (4.1) est dite maximale si pour toute solution $(\widetilde{J}, \widetilde{y})$ telle que $J \subset \widetilde{J}$ et $\widetilde{y}|_J = y$, on a nécéssairement $\widetilde{J} = J$.*

Il existe une méthode simple pour ramener toute équation du type (4.1) à une équation d'ordre 1, qui consiste à augmenter le nombre de variables. En effet, (J, y) est solution de (4.1) ssi (J, Y) est solution de

$$Y' = G(t, Y)$$

où on a posé

$$Y(t) = (y(t), y'(t), \ldots, y^{(k-1)}(t)) \in (\mathbb{R}^p)^k$$

et

$$G(t, y_1, y_2, \ldots, y_k) = (y_2, y_3, \ldots, y_k, F(t, y_1, \ldots, y_k)).$$

Ce procédé est à retenir et s'utilise souvent dans le cas des équations linéaires scalaires (voir plus bas).

4.2 Equations linéaires

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B : I \to \mathbb{R}^n$ des applications. Une équation différentielle linéaire d'ordre 1 est une équation du type

$$Y' = A(t)Y + B(t). \tag{4.2}$$

Une solution de (4.2), conformément au §1 est la donnée d'un couple (J, Y), où $J \subset I$ est un intervalle, et $Y : J \to \mathbb{R}^n$ est une fonction dérivable telle que pour tout $t \in J$, $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$. Le théorème fondamental de cette théorie est le suivant (dit théorème de Cauchy linéaire).

Théorème 4.2.1 *Soient $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B : I \to \mathbb{R}^n$ continues. Pour tout $t_0 \in I$, pour tout $Y_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une unique fonction $Y : I \to \mathbb{R}^n$, de classe C^1 telle que $Y(t_0) = Y_0$ et pour tout $t \in I$,*

$$Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t).$$

Ce théorème affirme que les solutions maximales sont définies sur tout I, et il y a unicité de la solution satisfaisant la condition initiale $Y(t_0) = Y_0$. Le problème d'explosion en temps fini n'existe pas pour les équations linéaires. Un corollaire important du théorème de Cauchy est le suivant.

Proposition 4.2.1 *Soit $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, continue. L'ensemble des solutions $\mathcal{H}$ de l'équation homogène*

$$Y' = A(t)Y$$

est un sous-espace vectoriel de $C^1(I, \mathbb{R}^n)$, de dimension finie n.

Comme conséquence on notera la proposition suivante.

Corollaire 4.2.1 *Sous les hypothèses du théorème de Cauchy (4.2.1), l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de (4.2) est un espace affine de dimension finie n. Si $\widetilde{Y}$ est une solution particulière de (4.2), alors*

$$\mathcal{S} = \widetilde{Y} + \mathcal{H},$$

au sens où toute solution de (4.2) est somme de $\widetilde{Y}$ et d'une solution de l'équation homogène.

Il suffit donc, après avoir résolu l'équation homogène, d'être capable d'exhiber une solution de l'équation complète pour les avoir toutes.

4.2.1 Variation des constantes, Wronskien

Théorème 4.2.2 *Soient $V_1, V_2, \ldots, V_n \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, n solutions de l'équation homogène*

$$Y' = A(t)Y,$$

où $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est continue. Posons pour tout $t \in I$, $W(t) = \det(V_1(t), \ldots, V_n(t))$. Alors on a pour tout $t, t_0 \in I$,

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} TrA(u)du\right).$$

La famille $V_1, \ldots, V_n$ est une base des solutions ssi pour tout $t \in I$, $W(t) \neq 0$, ssi il existe $t_0 \in I$ tel que $W(t_0) \neq 0$.

Le déterminant $W(t)$ est appelé “Wronskien”. Sa non-annulation lorsque $V_1, \ldots, V_n$ est libre est à la base de la méthode de “Variation des constantes” due à Lagrange. Elle consiste à chercher une solution particulière de (4.2) connaissant au préalable une base $V_1, \ldots, V_n$ des solutions de l'équation homogène. On cherche une solution sous la forme

$$\widetilde{Y}(t) = \mu_1(t)V_1(t) + \ldots + \mu_n(t)V_n(t),$$

où les $\mu_i : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions à valeurs scalaires et de classe C^1. On observe alors que $\widetilde{Y}$ est solution de l'équation complète (4.2) ssi

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i'(t)V_i(t) = B(t),$$

qui est un système linéaire d'inconnues $\mu_1', \ldots, \mu_n'$ résoluble car $\det(V_1(t), \ldots, V_n(t)) \neq 0$. Après intégration, on obtient les μ_i et donc une solution particulière de l'équation complète.

Examinons les cas concrets des équations linéaires scalaires d'ordre 1 et 2.

Equations d'ordre 1.
Elles sont du type

$$y' = a(t)y + b(t).$$

La solution générale de l'équation homogène est

$$y(t) = C \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(u)du\right),$$

où $t_0 \in I$ et C est une constante. L'espace des solutions est de dimension 1. La méthode de variation des constantes nous dicte de chercher une solution particulière $\widetilde{y}(t)$ sous la forme

$$\widetilde{y}(t) = C(t) \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(u)du\right),$$

ce qui conduit à résoudre

$$C'(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(u)du\right) B(t).$$

Equations d'ordre 2.
Elles sont du type

$$y''(t) = a(t)y' + b(t)y + c(t).$$

Contrairement au cas de l'ordre 1, il n'existe pas en général de méthode systématique pour résoudre l'équation homogène. Si on a su (par les moyens du bord) trouver deux solutions linéairement indépendantes u et v, on cherche alors une solution particulière sous la forme

$$\widetilde{y}(t) = \lambda(t)u(t) + \mu(t)v(t),$$

c'est à dire en faisant varier les deux constantes. Sous forme vectorielle, l'équation devient

$$Y' = A(t)Y + B(t),$$

avec $Y = (y, y')$, $B(t) = (0, c(t))$ et

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix}.$$

Une base des solutions de l'équation homogène est donc $U = (u, u'),\ V = (v, v')$ et la variation des constantes se ramène à résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \lambda'(t)u(t) & + & \mu'(t)v(t) & = & 0 \\ \lambda'(t)u'(t) & + & \mu'(t)v'(t) & = & c(t). \end{array} \right.$$

dont on sait déja qu'il est de Cramer. Notons au passage que le Wronskien

$$W(t) = \begin{vmatrix} u(t) & v(t) \\ u(t)' & v(t)' \end{vmatrix},$$

vérifie dans ce cas précis pour tout $t, t_0 \in I$

$$W(t) = W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(u)du\right),$$

relation utile dans de nombreux sujets de concours.

4.2.2 Equations à coefficients constants

La méthode de variation des constantes s'appliquant quel que soit le second membre, on décrira la méthode specifique de résolution dans le cas homogène, c'est à dire pour les équations du type

$$Y' = AY,$$

où $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La théorie est résumée dans le résultat suivant.

Théorème 4.2.3 *Soit $Y_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}$. L'unique solution Y de $Y' = AY$ vérifiant $Y(t_0) = Y_0$ est donnée pour tout $t \in \mathbb{R}$ par*

$$Y(t) = \exp\left((t - t_0)A\right) Y_0.$$

L'intéret de la formule ci-dessus est surtout théorique. Décrivons la méthode de résolution en pratique si A est diagonalisable (a priori sur $\mathbb{C}$). On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ les valeurs propres réelles de A (répétées avec multiplicité), et $V_1, V_2, \ldots, V_k \in \mathbb{R}^n$ les vecteurs propres associés. Soient $\mu_1, \ldots, \mu_p, \overline{\mu_1}, \ldots, \overline{\mu_p} \in \mathbb{C}$ les valeurs propres complexes conjuguées de A, dont les vecteurs propres associés seront notés $W_1, \ldots, W_p, \overline{W_1}, \ldots, \overline{W_p} \in \mathbb{C}^n$. On a donc $n = 2p + k$. On a l'observation suivante.

Proposition 4.2.2 *Une base des solutions réelles de l'équation $Y' = AY$ est donnée par les n fonctions de la variable t*

$$e^{t\lambda_1}V_1, \ldots, e^{t\lambda_k}V_k; \Re\left(e^{\mu_1 t}W_1\right), \Im\left(e^{\mu_1 t}W_1\right), \ldots, \Re\left(e^{\mu_p t}W_p\right), \Im\left(e^{\mu_p t}W_p\right).$$

Pour résoudre le problème de Cauchy $Y(t_0) = Y_0$, on cherche une combinaison linéaire Y des fonctions ci-dessus vérifiant $Y(t_0) = Y_0$, ce qui se ramène à résoudre un système. Voir les exercices pour des exemples de calcul concret.

Terminons cette section en décrivant le cas important des équations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants, c'est à dire des équations du type

$$(E) \quad y'' + ay' + by = 0.$$

Cette classe d'équations se ramène à une équation linéaire vectorielle d'ordre 1. On préfère cependant traiter le problème directement à l'aide du critère suivant.

Proposition 4.2.3 *Posons $P(X) = X^2 + aX + b$. Alors*
- *Si P a deux racines distinctes r_1, r_2 réelles, les solutions de (H) sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*
- *Si P a une racine double réelle r, les solutions de (H) sont les fonctions $t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{rt}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*
- *Si P a deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$, les solutions de (H) sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{\alpha t}\cos(\beta t) + \mu e^{\alpha t}\sin(\beta t)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

4.3 Equations non linéaires, théorie de l'existence

On reprend les notations du §1, où p est un entier, I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, et $F : I \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$ est une application. On notera $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^p$. On se limite aux équations dórdre 1, en vertu du principe de réduction expliqué au §1. On dira que F est localement lipschitzienne en la seconde variable ssi pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \mathcal{U}$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de (t_0, x_0) et une constante $C > 0$ telle que pour tout (t, x) et (t, x') dans $\mathcal{V}$,

$$\|F(t, x) - F(t, x')\| \leq C\|x - x'\|.$$

On a le théorème suivant (dit de Cauchy-Lipschitz).

Théorème 4.3.1 *On suppose que $F : I \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$ est continue et localement lipschitzienne en la seconde variable. Alors pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \mathcal{U}$, il existe une unique solution maximale (J, y) de l'équation différentielle*

$$y' = F(t, y)$$

avec J intervalle ouvert contenant t_0 et $y(t_0) = x_0$.

L'unicité est riche de conséquences : deux solutions maximales prenant la même valeur en un point $t_0 \in I$ sont égales. En particulier les courbes des solutions (appelées aussi courbes intégrales, orbites intégrales) ne peuvent se croiser. Cette remarque rigidifie considérablement la structure des orbites en petites dimensions ($p \leq 2$).

L'hypothèse "localement lipschitzienne en la seconde variable" se vérifie en pratique à l'aide de la remarque suivante.

Proposition 4.3.1 *Si $F : I \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$ est de classe C^1, alors F est localement lipschitzienne en la seconde variable.*

Si F est de classe C^1, alors en fait un résultat plus précis est valable, et montre en plus la régularité des solutions par rapport aux conditions initiales.

Théorème 4.3.2 *On suppose que $F : I \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$ est de classe C^1. Alors pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \mathcal{U}$, il existe $\epsilon > 0$, un ouvert $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^p$ contenant x_0 tel que pour tout $x \in \mathcal{V}$, il existe une unique solution (J, y_x) de l'équation différentielle*

$$y_x' = F(t, y_x)$$

avec $J = [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ et $y_x(t_0) = x$. De plus, pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto y_x(t)$ est de classe C^1.

Le théorème ci-dessus prouve de plus que le temps d'existence est localement uniforme par rapport aux données initiales (si x est proche de x_0 alors la solution y_x vivra au moins aussi longtemps que y_{x_0}). La question du temps d'existence des solutions est cruciale dans les applications. Comme on l'a vu au §1, même si $I = \mathbb{R}$, les solutions maximales peuvent exploser en temps fini. Le théorème suivant (appelé principe de majoration *a priori*, ou principe de sortie de tout compact) précise le comportement des solutions maximales au bord de l'intervalle d'existence.

Théorème 4.3.3 *Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, soit $y :]a, b[\subset I \to \mathbb{R}^p$ une solution maximale avec $b < \sup I$. Alors pour tout compact $K \subset \mathcal{U}$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de b dans $]a, b[$ tel que pour tout $t \in \mathcal{V}$, $y(t) \notin K$.*

Un conséquence immédiate est que si $\mathcal{U} = \mathbb{R}^p$ alors la solution maximale vérifie

$$\lim_{t \to b} \|y(t)\| = +\infty$$

si $b < \sup I$. On a des résultats analogues pour la borne inf. a. En pratique, pour prouver l'existence en tout temps des solutions maximales, on combine souvent le principe de sortie de tout compact avec des estimées a priori des solutions obtenues avec le fameux lemme de Gronwall.

Théorème 4.3.4 *Soient φ, ψ, y, 3 fonctions continues sur $[a, b]$, à valeurs réelles positives. On suppose que pour tout $t \in [a, b]$,*

$$y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(u) y(u) du.$$

Alors pour tout $t \in [a, b]$,

$$y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(u) du\right) ds.$$

Voir les exercices et la section suivante pour des applications de ce lemme. Il est à noter que la technique de preuve du lemme est à retenir (plus que le lemme lui même).

4.4 Equations autonomes et flots, complétude

On s'interesse ici au cas particulier et important des équations différentielles du type

$$y' = F(y),$$

où $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ est de classe C^1. On dit qu'un "champ de vecteurs" $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ est complet ssi les solutions maximales de $y' = F(y)$ sont définies sur $\mathbb{R}$. On a le théorème suivant.

Théorème 4.4.1 *Supposons qu'il existe $C_1, C_2 > 0$ tel que $\|F(x)\| \leq C_1\|x\| + C_2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, alors F est complet.*

Le théorème ci-dessus est un cas typique d'application de Gronwall+principe de sortie de tout compact. Pour certains types de champs de vecteurs particuliers (cas hamiltoniens), on peut obtenir la complétude sans hypothèses aussi restrictives de croissance, voir le problème 2. Si la croissance du champ de vecteur F est "plus que linéaire", on a pas en général complétude : si on considére l'équation scalaire

$$y' = y^\alpha$$

où $\alpha > 1$, alors toutes les solutions non identiquement nulles explosent en temps fini. Soit $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ un champ de vecteur C^1 et complet. Pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$\Phi_t(x) := y_x(t),$$

où y_x est l'unique solution de $y' = F(y)$ vérifiant $y(0) = x$. On a le théorème suivant (dit des flots).

Théorème 4.4.2 *Pour tout $x \in \mathbb{R}^p$et $t, s \in \mathbb{R}$, on a $\Phi_t(\Phi_s(x)) = \Phi_{t+s}(x)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_t : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ est un C^1-difféomorphisme.*

Ce théorème est le point de départ de la théorie moderne des systèmes dynamiques continus, appelés flots. Il reformule l'étude des solutions d'une équation différentielle autonome en termes de l'étude de l'action d'une famille à un paramètre de difféomorphismes, le flot du champ de vecteur F.

4.5 Exercices

Exercice 1.
Résoudre les équations différentielles suivantes, préciser l'intervalle d'existence des solutions. Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$?

1. $y' + y = \sin(t)$.
2. $(1+t^2)y' = ty + 1 + t^2$.
3. $(1-t^2)y' + ty = 0$.

Exercice 2.
Résoudre l'équation différentielle suivante.

$$y'' + 2y' + y = te^t.$$

Exercice 3.
Résoudre, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, l'équation différentielle suivante

$$y'' + y = \sin(\alpha t).$$

Exercice 4.
Soit $\omega \in \mathbb{R}_*^+$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

$$y'' + \omega^2 y = f(t).$$

Exercice 5.
Résoudre les systèmes différentiels suivants.

1. $\begin{cases} x' &= 4x - 2y \\ y' &= x + y \end{cases}$
2. $\begin{cases} x' &= x + 8y + e^t \\ y' &= 2x + y + e^{-3t} \end{cases}$
3. $\begin{cases} x' &= x + z \\ y' &= -y - z \\ z' &= 2y + z \end{cases}$

Exercice 6.
Soit $q : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' + q(t)y = 0.$$

– Montrer que les zéros des solutions (non identiquement nulles) de (E) sont isolés dans I.

– Soit y une solution non identiquement nulle de (E), et $a < b$ deux zéros consécutifs de y dans I. Montrer que

$$\int_a^b |q(t)|dt > \frac{4}{b-a}.$$

Exercice 7.
Soit $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On suppose de plus que q est strictement positive et croissante. Utiliser le lemme de Gronwall pour montrer que toutes les solutions de $y'' + q(t)y = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8.
Décrire les solutions de $y' = F(y)$ où $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si} & x \geq 0. \end{array} \right.$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique-t-il ?

Problème 1.
On considère dans $\mathbb{R}^2$ l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} x' & = & -y + x(x^2+y^2) \\ y' & = & x + y(x^2+y^2) \end{array} \right.$$

Soit (x_0, y_0) un point distinct de l'origine et on note $\gamma :]t_-, t_+[\to \mathbb{R}^2$ la solution maximale de (E) vérifiant $\gamma(0) = (x_0, y_0)$.

1. Justifier l'existence et l'unicité de γ.
2. On pose $N(x, y) = x^2 + y^2$ et $h = N \circ \gamma$. Exprimer $h'(t)$ en fonction de $\gamma(t)$. En déduire que $t_- = -\infty$.
3. Quelle équation différentielle (F) vérifie h ? Expliciter les solutions maximales de (F).
4. Montrer que t_+ est fini et que $\lim_{t \to t_+} \|\gamma(t)\| = +\infty$. Montrer aussi que $\gamma(t) \to (0, 0)$ quand $t \to -\infty$. Donner l'allure des solutions de (E).

Problème 2.
On considère l'équation différentielle

$$(H) \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} p' & = & -\nabla V(q) \\ q' & = & p \end{array} \right.$$

où $(q, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $V \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $\nabla V = (\frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}) \in \mathbb{R}^n$ est le gradient de V. Dans tout ce qui suit, $\|.\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. On suppose dans la suite que le "potentiel" V est positif sur tout $\mathbb{R}^n$.

1. Soit $\gamma_0(t) = (q_0(t), p_0(t))$ la solution maximale de (H) vérifiant $\gamma_0(0) = (x_0, y_0)$, définie sur son intervalle maximal d'existence noté $I_0 =]t_-, t_+[$. Justifier son existence et son unicité.

2. Pour tout $(q,p) \in \mathbb{R}^{2n}$, on pose $H(q,p) = \frac{1}{2}\|p\|^2 + V(q)$. Notons $h_0(t) = H \circ \gamma_0(t)$. Calculer pour tout $t \in I_0$, $h_0'(t)$. En déduire que h_0 est une constante, que l'on notera E_0 sur I_0.
3. Montrer qu'il existe $C_0 \geq 0$ tel que pour tout $t \in I_0$,
$$\|\gamma_0(t)\|_{\mathbb{R}^{2n}} = \left(\|q_0(t)\|^2 + \|p_0(t)\|^2\right)^{1/2} \leq C_0|t| + C_0.$$
4. En déduire que $I_0 = \mathbb{R}$, i.e. que les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que si $V(q) \to +\infty$ quand $\|q\| \to +\infty$, alors toutes les solutions (maximales) de (H) sont bornées sur $\mathbb{R}$.
6. Si $t \mapsto \gamma(t) = (q(t), p(t))$ est une solution de (H), on appelle "énergie" E la constante $E = H \circ \gamma(t)$. Une solution $t \mapsto \gamma(t) = (q(t), p(t))$ est dite "captive" ssi elle est bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que si V admet un minimum local strict en $z_0 \in \mathbb{R}^n$, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $E \in [V(z_0), V(z_0) + \epsilon[$, il existe une solution captive d'énergie E. Illustrer ce résultat par un dessin.

   Indication : Poser $E_0 = V(z_0)$. Montrer par des raisonnements topologiques qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que la composante connexe $\mathcal{V}_\epsilon$ de $V^{-1}([0, E_0 + \epsilon[)$ contenant z_0 soit bornée et l'on ait $V(\mathcal{V}_\epsilon) = [E_0, E_0 + \epsilon[$. Remarquer alors que les solutions γ de (H) vérifiant $\gamma(0) = (q, 0)$ avec $q \in \mathcal{V}_\epsilon$ sont bornées.

Problème 3.
On considère l'équation différentielle
$$(*) \qquad x' = \alpha(t)\cos^2(x)$$
où $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_*^+$ est continue.

1. Justifier que pour tout $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution maximale $x : I \to \mathbb{R}$ de $(*)$ telle que $x(t_0) = x_0$.
2. Determiner les solutions maximales constantes de $(*)$.
3. Soit y une solution maximale non constante de $(*)$, définie sur I. Déduire de la question précédente qu'il existe un unique $k \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $t \in I$, $(k - \frac{1}{2})\pi < y(t) < (k + \frac{1}{2})\pi$.
4. Montrer que y est donc définie sur $\mathbb{R} = I$ et est strictement croissante. On notera donc $l_- = \lim_{t \to -\infty} y(t)$ et $l_+ = \lim_{t \to +\infty} y(t)$.
5. On suppose ici que α admet une limite non nulle en $+\infty$. Montrer que $l_+ = (k + \frac{1}{2})\pi$.
6. Montrer de même que si α admet une limite non nulle en $-\infty$, alors $l_- = (k - \frac{1}{2})\pi$.
7. On suppose dorénavant que $\alpha(t) = e^t$. Que peut-on dire sur l_-, l_+ ?
8. Soit $y_0 \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})\pi$. Expliciter la solution maximale y de $(*)$ vérifiant $y(0) = y_0$. Calculer $\lim_{t \to -\infty} y(t)$. Conclusion ?