

Mémoire d'HDR, Mathématiques section 25

**Analyse spectrale d'opérateurs de
transfert et Résonances**

Frédéric Naud
Laboratoire de Mathématiques d'Avignon



HDR soutenue le 09/12/2015.

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Contenu	2
1.2	Liste complète de publications	4
2	Opérateurs de transfert génériques et spectre de Ruelle	6
2.1	Le résultat principal	6
2.2	Déterminants et ordre de croissance	9
2.3	Les contractions affines	11
2.4	Un peu de théorie du potentiel	11
3	Une minoration pour les résonances de Ruelle-Pollicott des flots	15
3.1	Semi-flots réels analytiques	15
3.2	Opérateurs de transfert et estimées a priori	19
3.3	La preuve en quelques lignes	20
3.4	Extension aux flots d'Anosov C^∞	22
4	Equidistribution et séries d'Eisenstein en volume infini	25
4.1	Séries d'Eisenstein vues comme ondes planes	25
4.2	Théorèmes d'équidistribution	29
4.3	Lignes nodales et nombre d'intersections	30
4.4	Éléments de preuves	34
5	Densité et localisation des résonances sur $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$	37
5.1	Introduction et résultat	37
5.2	Déterminants et opérateurs de transfert	41
5.3	Moyennes quadratiques	43

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contenu

Depuis la soutenance de ma thèse de doctorat à l'université Bordeaux 1 (fin 2003), mes directions de recherche se sont naturellement diversifiées et c'est toujours un exercice difficile que de dégager une unité thématique ou d'effectuer une synthèse en se basant sur une collection de travaux qui sont nés au gré (et au hasard) des lectures, discussions et collaborations diverses. Pour ma part, il existe tout de même un thème (ou un outil) récurrent facile à identifier : c'est celui de l'analyse spectrale des opérateurs de transfert. Un opérateur de transfert s'écrit localement comme

$$\mathcal{L}(f)(x) = \sum_j w(\phi_j(x))(f \circ \phi_j)(x),$$

où f est dans un espace fonctionnel ad-hoc et les ϕ_j sont des contractions, par exemple les branches inverses d'une application dilatante. Le poids w est souvent muni d'un paramètre, par exemple

$$w(x) = e^{-\frac{i}{h}\tau(x)}.$$

La problématique générale consiste à étudier le spectre $\mathcal{L}$ sur un espace fonctionnel bien choisi, en regardant souvent des régimes "à haute fréquence" comme $h \rightarrow 0^+$. Ces problèmes spectraux jouent un rôle fondamental dans diverses questions de la théorie ergodique (vitesse de mélange des flots et des extensions), et de l'analyse des résonances classiques et quantiques via les déterminants (ou fonctions zêtas).

J'ai donc choisi de constituer ce mémoire d'habilitation de cinq-six articles qui tournent autour de ce sujet, à l'exception du chapitre 3 qui est plus orienté vers les fonctions propres. Je passe donc sous silence mon article sur

la formule de traces avec Colin Guillarmou [16], mon article sur la minoration locale de la densité des résonances avec Dima Jakobson [22], et mon travail sur les ondes avec C. Guillarmou [17]. Les résultats de ma thèse [32, 33] seront seulement évoqués dans certains chapitres. Au lieu de faire un résumé en français et de joindre une compilation d'articles écrits en anglais, j'ai décidé ici de faire un effort pour produire un mémoire intégralement rédigé en Français, sans copier-coller. Le style adopté ici est semi-détaillé : ce ne sont pas de vraies démonstrations, mais on essaie de faire passer quelques idées clés en simplifiant au maximum la technicité du discours ou la généralité de l'énoncé. Mis à part cette courte introduction, il y a donc quatre chapitres dont nous faisons ici une description succincte.

- *Chapitre 2* : Le spectre de Ruelle des opérateurs de transfert génériques. On expose ici le contenu de l'article [36] qui concerne un résultat de minoration pour les valeurs propres (spectre de Ruelle) d'opérateurs de transfert "nucléaires" associés à un système de contractions holomorphes. On montre que l'estimée supérieure due à Bandtlow-Jenkinson [2] est optimale pour un ensemble dense d'opérateurs. La technique utilisée est issue de la théorie du potentiel.
- *Chapitre 3* : Minoration de la vitesse de mélange pour les semi-flots réels analytiques. Ce chapitre est (sous une forme synthétique) issu de [34, 23] et dans une moindre mesure [35]. On utilise ici une méthode de formule de trace ainsi qu'une minoration basée sur une moyenne quadratique pondérée. La minoration (valable pour des observables génériques) fait apparaître un terme de pression topologique. On peut ainsi voir l'influence des quantités thermodynamiques (pression, entropie) sur la vitesse de mélange.
- *Chapitre 4* : Equidistribution des séries d'Eisenstein pour les variétés hyperboliques convexes co-compactes $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$. Dans ce chapitre "atypique", il n'est ni question de résonances ni d'opérateurs de transfert mais plutôt de fonctions propres. Les séries d'Eisenstein sont des fonctions propres généralisées qui paramétrisent le spectre continu du Laplacien sur les variétés hyperboliques. On étudie ici leur équidistribution microlocale "à haute énergie" et on prouve un asymptotique avec reste, sous l'hypothèse que la dimension de l'ensemble limite δ vérifie $\delta < \frac{1}{2}$. Ce travail fait avec C. Guillarmou [18] est bien sûr motivé par des questions de chaos quantique. On explique ensuite comment prouver un théorème de "restriction" à des géodésiques qui sert à démontrer des résultats de comptage pour les lignes nodales des séries d'Eisenstein [24].
- *Chapitre 5* : Estimées de Weyl supérieures pour les résonances des surfaces hyperboliques. Dans ce travail [37], on utilise des méthodes

d'opérateurs de transfert pour obtenir des bornes de Weyl pour le comptage des résonances du laplacien sur les surfaces hyperboliques convexes co-compactes $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$. Se basant sur l'idée de l'estimation ponctuelle de la fonction zêta de Selberg due à Guillopé-Lin-Zworski [20], on améliore significativement l'estimée de comptage des résonances de Zworski [51] dans les bandes $\frac{\delta}{2} < \text{Re}(s) \leq \delta$ en faisant appel à une technique de moyenne quadratique en "énergie". L'intérêt de ce travail est qu'il confirme certaines expérimentations numériques sur le "pic de densité" des résonances et pose la question du "trou spectral essentiel" qui est centrale dans les applications diverses de cette théorie (théorie des nombres, comptage dans les groupes discrets).

Les articles et préprints servant de base à ces 4 chapitres sont téléchargeables au format .pdf sur la page internet suivante :

<http://fredericnaud.perso.sfr.fr/publi.html>

Je tiens à remercier mes collaborateurs Colin Guillarmou et Dima Jakobson pour ce qu'ils m'ont appris ainsi que tous les membres des divers projets ANR auquel j'ai participé ces derniers temps. Je pense en particulier à Nalini Anantharaman, Viviane Baladi, Frédéric Faure, Stéphane Nonnenmacher, Gabriel Rivière, Emmanuel Schenck, Johannes Sjöstrand, dont les présences à ces réunions ANR ont contribué à créer de belles collaborations. Je remercie mon directeur de thèse Vesselin Petkov pour l'influence positive qu'il a eue sur ma vision des mathématiques et son incroyable énergie. Je remercie également Maciej Zworski, mon année de post-doc à Berkeley a été décisive pour la recherche d'après thèse.

Merci au 3 rapporteurs, Viviane Baladi, Laurent Guillopé et Stéphane Nonnenmacher pour leur lecture attentive et leurs commentaires, et de l'honneur qu'il m'ont fait en acceptant de rapporter ce mémoire. Un grand merci aux membres Avignonnais du Jury qui sont Marie-Claude Arnaud et Philippe Bolle. Merci à tous mes collègues du laboratoire de mathématiques d'Avignon de contribuer chaque jour à créer un climat intellectuel fertile et varié, propice à une recherche de qualité.

D'un point de vue plus personnel, je remercie bien sûr ma compagne Claire et mes deux filles Alice et Héloïse pour leur soutien et leur compréhension durant toutes ces années de vie commune.

1.2 Liste complète de publications

F. Naud. *Analytic continuation of a dynamical zeta function under a diophantine condition*. **Nonlinearity** 14, Vol. 5 (2001), 995–1009.

- F. Naud. *Birkhoff cones, symbolic dynamics and spectrum of transfer operators*. **Discrete Contin. Dyn. Syst.** 11, Vol. 2-3 (2004), 581–598.
- F. Naud. *Expanding maps on Cantor sets and analytic continuation of zeta functions*. **Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.** 38, Vol. 1 (2005), 116–153.
- F. Naud. *Precise asymptotics of the length spectrum for finite geometry Riemann surfaces*. **Int. Math. Res. Not.** 2005 (no 5), 299–310.
- F. Naud. *Classical and Quantum lifetimes on some non-compact Riemann surfaces*. **Journal of Physics A** 38, (2005) no 49, 10721–10729.
- Colin Guillarmou and F. Naud. *Wave 0-trace and length spectrum on convex co-compact manifolds*. **Comm. Anal. Geom.** 14, no 5, (2006), 945–967.
- Colin Guillarmou and F. Naud. *Wave decay on convex co-compact hyperbolic manifolds*. **Comm. Math. Phys.** 287, 489–511 (2009).
- F. Naud. *Entropy and decay of correlations for real analytic semi-flows*. **Ann. Henri Poincaré** 10 (2009), 429–451.
- Dima Jakobson and F. Naud. *Lower bounds for resonances of infinite area Riemann surfaces*. **Analysis & PDE** 3 (2010), no 2, 207–225.
- F. Naud. *The Ruelle spectrum of generic transfer operators*. **Discrete Contin. Dyn. Syst.** 32 (2012), no 7, 2521–2531
- Dima Jakobson and F. Naud. *On the critical line of convex co-compact hyperbolic surfaces*. **Geom. Funct. Anal.** 22 (2012), no. 2, 352–368.
- Colin Guillarmou and F. Naud. *Equidistribution of Eisenstein series for convex co-compact hyperbolic manifolds. Microlocal methods in mathematical physics and global analysis*, 95–98, Trends Math., Birkhäuser/Springer, Basel, 2013.
- Colin Guillarmou and F. Naud. *Equidistribution of Eisenstein series on convex co-compact hyperbolic manifolds*. **Amer. J. Math.** 136 (2014), no. 2, 445–479.
- F. Naud. *Density and location of resonances for convex co-compact hyperbolic surfaces*. **Invent. Math.** 195 (2014), no. 3, 723–750.
- Dima Jakobson and F. Naud. *Resonances and density bounds for convex co-compact congruence subgroups of $SL_2(\mathbb{Z})$. To appear in Israel J. Math.*
- Jin Long and Maciej Zworski (with appendix by F. Naud). *A local trace formula for Anosov flows*. Preprint 2014.
- Dima Jakobson and F. Naud. *On the nodal lines of Eisenstein series on Schottky surfaces*. Preprint 2015.



Chapitre 2

Sur le spectre d'opérateurs de transfert génériques

2.1 Le résultat principal

Dans ce chapitre, on va décrire le résultat principal de l'article [36] qui se base sur des méthodes de théorie du potentiel. Commençons par introduire les définitions nécessaires. Dans tout ce qui suit, Ω désigne un ouvert *borné* et *convexe*¹ de $\mathbb{C}^d$. Soient $\phi_1, \dots, \phi_k$ des applications *holomorphes*

$$\phi_i : \Omega \rightarrow \Omega$$

que l'on supposera être des contractions i.e. pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, on a

$$\overline{\phi_i(\Omega)} \subset \Omega.$$

Considérons également une collection $w_1, \dots, w_k$ de fonctions holomorphes $w_i : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ que l'on supposera possédant des extensions continues à $\overline{\Omega}$. Ruelle fut probablement le premier [43] à s'intéresser aux propriétés spectrales de l'opérateur de transfert $\mathcal{L}$ défini par

$$\mathcal{L}(f)(z) := \sum_{j=1}^k w_j(z)(f \circ \phi_j)(z),$$

où $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ appartient à un "bon" espace fonctionnel. Par "bon" espace fonctionnel on entend un espace de Banach de fonctions holomorphes sur Ω . Le choix originel de Ruelle est l'espace $\mathcal{H}(\Omega)$ des fonctions holomorphes *bornées* sur Ω munit de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{H}} := \sup_{\Omega} |f|,$$

1. Convexe est à prendre au sens usuel.

mais on peut aussi pencher pour l'espace de Bergmann

$$A^2(\Omega) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : \text{holomorphe et } \int_{\Omega} |f|^2 dV < \infty \right\},$$

où dV est la mesure de Lebesgue sur Ω . L'espace $A^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable. L'opérateur $\mathcal{L} : A^2(\Omega) \rightarrow A^2(\Omega)$ est compact à trace, et son spectre de *valeurs propres non nulles* sera noté par la suite $(\lambda_n(\mathcal{L}))_{n \in \mathbb{N}}$, où les $\lambda_n(\mathcal{L})$ sont ordonnés par modules décroissants. Ce spectre ponctuel peut être fini ou vide, auquel cas on posera $\lambda_n(\mathcal{L}) = 0$ pour n grand ou pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il faut noter que cette suite de Ruelle a un caractère intrinsèque car elle ne dépend pas du choix de l'espace fonctionnel du moment que celui ci garantit les propriétés de nuclearité (trace) de $\mathcal{L}$. On renvoie le lecteur au travail de Bandtlow-Jenkinson [2] qui clarifie ces questions.

Cette suite $\lambda_n(\mathcal{L})$ joue un rôle important dans la théorie ergodique des systèmes hyperboliques. Un cas particulier pertinent d'opérateur de transfert est celui des opérateurs de Perron-Frobenius associés à une transformation dilatante. Dans ce cas le spectre de Ruelle associé décrit le comportement asymptotique des *fonctions de corrélation* (vitesse de mélange). Soyons un peu plus précis et donnons une famille d'exemples canoniques. Considérons

$$T : [0, 1] = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_k \rightarrow [0, 1],$$

où chaque intervalle I_j est de la forme

$$I_j = [a_j, b_j)$$

et pour tout $j = 1, \dots, k$ on a $T(\overline{I_j}) = [0, 1]$. On suppose de plus que la transformation T est *réelle analytique* sur chacun des $\overline{I_j}$ et uniformément dilatante i.e.

$$\min_{j=1, \dots, k} \inf_{x \in I_j} |(T|_{I_j}(x))'| > 1.$$

Il est bien connu que sous les hypothèses précédentes, $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ admet une unique mesure invariante absolument continue par rapport à Lebesgue (mesure SRB) dont la densité notée h_{srb} est ici aussi réelle analytique. Prenons deux observables $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ (pour l'instant continus). La fonction de corrélation associée (qui mesure la décorrélation asymptotique) est

$$C_{f,g}(n) := \int (f \circ T^n) g h_{srb} dx - \int f h_{srb} dx \int g h_{srb} dx.$$

Un changement de variable montre que

$$\int (f \circ T^n) g h_{srb} dx = \int f \mathcal{L}^n(g h_{srb}) dx,$$

où $\mathcal{L}$ est l'opérateur de "Perron-Frobenius" donné par

$$\mathcal{L}(f)(x) = \sum_{i=1}^k |T'(T_i^{-1}x)|^{-1} f(T_i^{-1}x),$$

et T_i^{-1} est la branche inverse de $T|_{I_i}$. Comme chaque branche T_i est réelle analytique et dilatante, on peut trouver un voisinage complexe $\Omega \subset \mathbb{C}$ de $[0, 1]$ de telle sorte que chaque branche inverse T_i^{-1} se prolonge holomorphiquement à Ω et vérifie l'hypothèse de contraction $\overline{T_i^{-1}(\Omega)} \subset \Omega$. On comprend alors² que, pour g dans un $A^2(\Omega)$, quitte à réduire Ω , la suite de Ruelle $\lambda_p(\mathcal{L})$ permet de donner un développement asymptotique de $C_{f,g}(n)$ de la forme

$$C_{f,g}(n) = \sum_{p : |\lambda_p| > \theta} P_p(f, g)(n) \lambda_p^n + O((\theta + \epsilon)^n),$$

où $P_p(f, g)(n)$ est un polynôme en n , ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $1 > \theta > 0$.

Les questions ouvertes concernant le spectre de tels opérateurs de transfert sont multiples : réalité du spectre, taille du trou spectral $|\lambda_1|$, répartition asymptotique quand $n \rightarrow \infty$ de la suite (λ_n) . C'est cette dernière question qui va nous intéresser. On sait essentiellement depuis Ruelle [43] que l'on a l'estimation suivante :

$$|\lambda_n| \leq C_1 e^{-C_2 n^{1/d}},$$

où C_1, C_2 sont des constantes (voir [2] pour l'expression explicite la plus précise connue à ce jour). La question naturelle qui suit est celle de l'optimalité de cette estimée, en particulier de l'exposant $1/d$. Il existe à notre connaissance peu d'exemples où on sait calculer le spectre de Ruelle : les applications affines par morceaux (voir plus loin) et les produits de Blaschke dilatants sur le cercle [44]. Ces calculs confirment que cette borne est saturée.

Est-ce un résultat réaliste pour les opérateurs de transfert génériques ? Introduisons quelques notations. On désigne par $U(\Omega)$ l'espace de Banach des fonctions holomorphes sur Ω , $\mathbb{C}$ -valuées, admettant une extension continue à $\overline{\Omega}$. On le munit naturellement de la norme

$$\|f\|_{U(\Omega)} := \sup_{z \in \Omega} |f(z)|.$$

Notons maintenant $\mathcal{K}(\Omega)$ l'espace des *contractions* holomorphes de Ω (c'est un ouvert de $U(\Omega)^d$)

$$\mathcal{K}(\Omega) := \{\phi \in U(\Omega)^d : \overline{\phi(\Omega)} \subset \Omega\}.$$

2. Dans ce cas précis, $\lambda_0 = 1$.

L'espace des "modules" $\mathcal{M}_k(\Omega)$ (les données nécessaires à définir un opérateur de transfert) est donc

$$\mathcal{M}_k(\Omega) := \mathcal{K}(\Omega)^k \times U(\Omega)^k.$$

Se donnant $(\phi, w) = (\phi_1, \dots, \phi_k; w_1, \dots, w_k) \in \mathcal{M}_k(\Omega)$, on lui associe donc l'opérateur de transfert $\mathcal{L}_{\phi, w}$ agissant sur $A^2(\Omega)$.

Théorème 2.1.1 *Il existe un sous-ensemble dense $\mathcal{G} \subset \mathcal{M}_k(\Omega)$ tel que pour tout $(\phi, w) \in \mathcal{G}$, on a pour tout $\epsilon > 0$,*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|\lambda_n(\mathcal{L}_{\phi, w})|}{e^{-n^{1/d+\epsilon}}} > 0.$$

Ce théorème montre l'optimalité de l'exposant $1/d$ pour une famille dense d'opérateurs de transfert. On verra qu'il est possible d'obtenir des résultats de genericité beaucoup plus forte pour des familles à un nombre fini de paramètres. La suite de ce chapitre dessine les idées clés de la preuve qui utilise des méthodes puissantes de théorie du potentiel mises en lumière par le travail de T. Christiansen sur les résonances d'opérateurs de Schrödinger génériques [7, 8].

2.2 Déterminants et ordre de croissance

Pour étudier les valeurs propres de $\mathcal{L}$, on va se ramener à l'étude de la croissance du déterminant de Fredholm³

$$Z(\zeta) := \det(I - e^\zeta \mathcal{L}).$$

La fonction $\zeta \mapsto Z(\zeta)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et le lemme suivant (ou plutôt sa contraposée) vont nous permettre de ramener le problème à une étude de l'ordre de $Z(\zeta)$, voir plus bas pour la définition.

Lemme 2.2.1 *Supposons que pour tout $n \geq 0$,*

$$|\lambda_n(\mathcal{L})| \leq A e^{-an^\rho},$$

avec des constantes $A, a > 0$ et $0 < \rho \leq 1$. Alors il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$,

$$|Z(\zeta)| \leq C_1 e^{C_2 |\zeta|^{1+1/\rho}}.$$

3. Légitime car $\mathcal{L}$ est à trace sous les hypothèses précédentes.

La preuve est élémentaire et repose simplement sur la définition du déterminant. L'ordre de la fonction entière $Z(\zeta)$ est défini comme suit ⁴

$$\rho(Z) := \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \left(\sup_{|\zeta| \leq r} \max\{\log |Z(\zeta)|, 0\} \right)}{\log r}.$$

Ainsi, le Lemme précédent montre que si $|\lambda_n(\mathcal{L})| \leq C_1 e^{-C_2 n^{1/d}}$, alors on a $\rho(Z) \leq d + 1$. En résumé, pour toute donnée $(\phi, w) \in \mathcal{M}_k(\Omega)$ on associe une fonction entière $Z_{\phi, w}(\zeta) := \det(I - e^\zeta \mathcal{L}_{\phi, w})$ dont l'ordre $\rho(Z_{\phi, w})$ est au plus $d + 1$. Le but est donc (pour prouver le théorème principal) de montrer que $\rho(Z_{\phi, w})$ est égal à $d + 1$ sur une partie dense de $\mathcal{M}_k(\Omega)$.

La stratégie est de considérer des familles à un paramètre (des segments). Se donnant (ϕ_0, w_0) et (ϕ_1, w_1) dans $\mathcal{M}_k(\Omega)$, pour tout $z \in [0, 1]$, et $\omega \in \Omega$, on pose

$$\phi(z, \omega) = (1 - z)\phi_0(\omega) + z\phi_1(\omega),$$

qui a un sens par convexité de Ω .

Clairement, pour tout $z \in [0, 1]$, $\phi(z, \cdot) \in \mathcal{K}(\Omega)$ et par compacité de $\phi([0, 1] \times \overline{\Omega}) \subset \Omega$, on peut trouver un ouvert connexe $\mathbb{C} \supset \mathcal{U} \supset [0, 1]$ tel que pour tout $z \in \mathcal{U}$, $\phi(z, \cdot) \in \mathcal{K}(\Omega)$. Posons pour simplifier $\phi(z, \cdot) = \phi_z$. De même pour $w_0, w_1 \in U(\Omega)^k$, on peut poser pour tout $z \in \mathcal{U}$, $w_z = zw_1 + (1 - z)w_0 \in U(\Omega)^k$. L'opérateur de transfert $\mathcal{L}_z := \mathcal{L}_{\phi_z, w_z}$ est défini comme précédemment et on peut vérifier que c'est une fonction holomorphe de $z \in \mathcal{U}$. On a donc un chemin dans $\mathcal{M}_k(\Omega)$ connectant (ϕ_0, w_0) , $(\phi_1, w_1) \in \mathcal{M}_k(\Omega)$. On peut donc considérer les fonctions holomorphes (à deux variables) sur $\mathcal{U} \times \mathbb{C}$

$$(z, \zeta) \mapsto \det(I - e^\zeta \mathcal{L}_{\phi_z, w_z}) := Z(z, \zeta).$$

Théorème 2.2.2 *Utilisant les notations précédentes, supposons que l'on ait $\rho(Z(0, \cdot)) = d + 1$. Alors il existe un sous-ensemble $E \subset \mathcal{U}$ de dimension de Hausdorff 0, tel que pour tout $z \in \mathcal{U} \setminus E$, $\rho(Z(z, \cdot)) = d + 1$.*

Plus de détails sur ce théorème clé seront donnés plus loin. Il est basé sur la théorie du potentiel. Il dit en particulier que $[0, 1] \setminus E$ est dense dans $[0, 1]$. Il existe donc des paramètres $z \in [0, 1]$ arbitrairement proches de 1 tel que $\rho(Z(z)) = d + 1$. La stratégie finale se dessine. Il suffit donc de connaître un élément $(\phi_0, w_0) \in \mathcal{M}_k(\Omega)$ tel que l'ordre $\rho(Z_{\phi_0, w_0})$ soit maximal i.e. égal à $d + 1$ pour conclure. En effet, tout élément (ϕ, w) sera connectable par convexité à (ϕ_0, w_0) et le résultat précédent nous permet de construire des éléments d'ordre maximal arbitrairement proches de (ϕ, w) .

4. Ici on doit écrire $\max\{\log |Z(\zeta)|, 0\}$ pour avoir une définition consistante quand $Z(\zeta)$ est constante et que $\log |Z(\zeta)| < 0$. En fait si $Z(\zeta)$ est non constante, la fonction $r \mapsto \max_{|\zeta| \leq r} \log |Z(\zeta)|$ est une fonction convexe de $\log r$ et donc tend vers $+\infty$ quand $r \rightarrow +\infty$.

2.3 Les contractions affines

Dans l'espace des "modules" $\mathcal{M}_k(\Omega)$ il existe toujours des données dont on sait calculer le spectre de Ruelle. Ce sont les contractions affines. Donnons nous pour tout $i = 1, \dots, k$, $r_i \in \mathbb{R}$ avec $0 < r_i < 1$ ainsi que $q_i \in \mathbb{C}^d$. Posons pour $z \in \mathbb{C}^d$,

$$\gamma_i(z) := r_i z + q_i.$$

On suppose de plus que pour tout i , $\overline{\gamma_i(\Omega)} \subset \Omega$. Une telle famille de contractions existe toujours puisque Ω est borné. On considère l'opérateur de transfert suivant :

$$\mathcal{L}(f) := \sum_{i=1}^k r_i (f \circ \gamma_i).$$

Un simple calcul de déterminant amène au résultat suivant.

Lemme 2.3.1 *L'identité suivante est valable :*

$$\det(I - e^\zeta \mathcal{L}) = \prod_{\ell=0}^{\infty} \left(1 - e^\zeta \sum_{i=1}^k r_i^{\ell+1} \right)^{m_\ell},$$

où on a noté

$$m_\ell = \frac{d(d+1)\dots(d+\ell-1)}{\ell!} = \binom{d+\ell-1}{\ell}.$$

Un calcul du même type est présent dans l'article de David Fried [15]. En utilisant ce lemme (et la formule de Jensen), il est alors facile de montrer que la fonction entière $Z(\zeta) := \det(I - e^\zeta \mathcal{L})$ est exactement d'ordre $d+1$. Cette observation combinée au théorème 2.2.2 complète la preuve.

2.4 Un peu de théorie du potentiel

On finit ce chapitre par quelques outils de théorie du potentiel et une preuve du théorème 2.2.2 qui est la clé de l'argument. Nos références sont le livre [28] pour les fonctions de plusieurs variables complexes et [42] pour la théorie du potentiel dans le plan. Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert connexe non vide. On note $D(a, r) \subset \mathbb{C}$ le disque euclidien (fermé) centré en a et de rayon r .

Définition 2.4.1 *Une fonction à valeurs réelles $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow [-\infty, +\infty)$ est dite pluri sous-harmonique sur $\mathcal{O}$ si on a*

1. φ est semi-continue supérieurement et $\varphi \not\equiv -\infty$ sur $\mathcal{O}$.

2. Pour tout $z \in \mathcal{O}$, pour tout $r > 0$ et $w \in \mathbb{C}^n$ tel que $z + wD(0, r) \subset \mathcal{O}$,

$$\varphi(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(z + wre^{i\theta}) d\theta.$$

On notera $\mathcal{PSH}(\mathcal{O})$ l'ensemble des fonctions pluri sous-harmoniques sur le domaine $\mathcal{O}$. On a les propriétés de base suivantes.

Proposition 2.4.2 1. $\mathcal{PSH}(\mathcal{O})$ est stable par combinaisons linéaires positives.

2. Si $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{PSH}(\mathcal{O})$, alors $\max\{\varphi_1, \varphi_2\} \in \mathcal{PSH}(\mathcal{O})$.

3. $PSH(\mathcal{O}) \subset L_{loc}^1(\mathcal{O})$.

4. Si $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe non identiquement nulle, alors $\varphi(z) = \log|f(z)|$ est pluri sous-harmonique.

Un sous-ensemble $E \subset \mathcal{O}$ est dit *pluripolaire* si il existe une fonction $\mathcal{PSH}$, $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow [-\infty, +\infty)$ tel que $E \subset \{z \in \mathcal{O} : \varphi(z) = -\infty\}$. Par la propriété (3) ci-dessous, on en déduit que tout ensemble pluripolaire est mesurable de mesure de Lebesgue nulle. Dans le cas $n = 1$, on peut montrer, [42] P. 57, que tout ensemble Borélien polaire a une dimension de Hausdorff nulle. Il peut toutefois être non dénombrable, voir [42] P.143, pour des exemples de type Cantor. Une propriété fondamentale des fonctions $\mathcal{PSH}$ est le principe du maximum.

Proposition 2.4.3 Soit $\varphi \in \mathcal{PSH}(\mathcal{O})$, alors pour tout $z \in \mathcal{O}$, on a soit

$$\varphi(z) < \sup_{x \in \mathcal{O}} \varphi(x),$$

ou $\varphi = \sup_{\mathcal{O}} \varphi$ est constante.

Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un domaine et soit $\varphi = \varphi(z, w) : \mathcal{U} \times \mathbb{C} \rightarrow [-\infty, +\infty)$ une fonction pluri sous-harmonique. Pour tout $z \in \mathcal{U}$ on définit l'ordre de croissance $\rho(z)$ (par rapport à w) par

$$\rho_\varphi(z) := \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log(\sup_{|w| \leq r} \max\{\varphi(z, w), 0\})}{\log r}.$$

En général, $z \mapsto \rho_\varphi(z)$ n'est pas $\mathcal{PSH}$ de sorte que l'on ne peut lui appliquer le principe du maximum. Mais on a toutefois le résultat bien utile suivant qui reste valable ([28], P.25).

Proposition 2.4.4 *Supposons que $\varphi \in \mathcal{PSH}(\mathcal{U} \times \mathbb{C})$ et que $\varphi \geq 1$. Alors pour tout domaine relativement compact $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$, il existe une suite de fonctions négatives $\psi_q \in \mathcal{PSH}(\mathcal{U}')$ tel que pour tout $z \in \mathcal{U}'$,*

$$\frac{-1}{\rho_\varphi(z)} = \limsup_{q \rightarrow +\infty} \psi_q(z).$$

Pour prouver le théorème 2.2.2, on a besoin en plus du fait suivant ([28], P.25) qui remplace le principe du maximum.

Proposition 2.4.5 *Soit (φ_q) une suite dans $\mathcal{PSH}(\mathcal{O})$, uniformément majorée sur tout compact. Supposons que $\limsup_{q \rightarrow +\infty} \varphi_q \leq 0$ et qu'il existe $\xi \in \mathcal{O}$ tel que $\limsup_{q \rightarrow +\infty} \varphi_q(\xi) = 0$. Alors*

$$\limsup_{q \rightarrow +\infty} \varphi_q = 0,$$

sauf sur un sous-ensemble pluripolaire de $\mathcal{O}$.

Montrons donc comment en déduire le théorème 2.2.2. Considérons donc la fonction pluri sous-harmonique sur $\mathcal{U} \times \mathbb{C}$ donnée par

$$\varphi(z, \zeta) = \max\{\log |Z(z, \zeta)|, 1\} \geq 1.$$

On sait que pour tout $z \in \mathcal{U}$, $\rho_\varphi(z) \leq d + 1$. Prenons $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ relativement compact dans $\mathcal{U}$ tel que $0 \in \mathcal{U}'$ et utilisons la proposition 2.4.4 qui nous donne l'existence d'une suite de fonctions sous-harmoniques ψ_q sur $\mathcal{U}'$ telle que

$$\frac{-1}{\rho_\varphi(z)} = \limsup_{q \rightarrow +\infty} \psi_q(z).$$

Pour tout $q \in \mathbb{N}$, posons $\varphi_q(z) = \psi_q(z) + 1/(d + 1)$. Clairement chaque φ_q est sous-harmonique sur $\mathcal{U}'$, la suite est uniformément bornée et

$$\limsup_{q \rightarrow +\infty} \varphi_q \leq 0.$$

Par ailleurs, on sait que

$$\rho(Z(0)) := \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \left(\sup_{|\zeta| \leq r} \max\{\log |Z(0, \zeta)|, 0\} \right)}{\log r} = d + 1.$$

De plus, $\zeta \mapsto Z(0, \zeta)$ est une fonction entière non-constante donc

$$M(r) = \sup_{|\zeta| \leq r} \log |Z(0, \zeta)|$$

tend vers $+\infty$ quand $r \rightarrow +\infty$, donc on a $\rho(Z(0)) = \rho_\varphi(0) = d + 1$. Appliquant la proposition 2.4.5 (avec $\xi = 0$), on obtient que $\rho_\varphi(z) = d + 1$ pour tout $z \in \mathcal{U}' \setminus E$ où E est un sous ensemble polaire de $\mathcal{U}'$. Prenant une exhaustion dénombrable de $\mathcal{U}$ par des ensembles relativement compacts et utilisant le fait qu'une réunion dénombrable d'ensembles polaires est polaire ([28], P.24), on obtient que $\rho_\varphi(z) = d + 1$ sauf sur un sous-ensemble polaire de $\mathcal{U}$, qui est de dimension de Hausdorff 0. La preuve est finie en remarquant que si $\rho_\varphi(z) = d + 1$, on a en fait $\rho(Z(z)) = \rho_\varphi(z) = d + 1$. $\square$

En résumé, on a obtenu un sous-ensemble dense de l'espace des paramètres $\mathcal{M}_k(\Omega)$ pour lesquels l'estimée supérieure sur les valeurs propres de Ruelle est optimale. Plusieurs questions restent en suspens.

- Peut-on faire mieux en terme de généricité et obtenir un G_δ -dense ?
- Que dire du cas des applications dilatantes du cercle ? En effet dans le cas du cercle, rien ne s'oppose à l'utilisation de la même technique sauf que les exemples "canoniques" que sont les puissances $z \mapsto z^p$ ont un spectre de Ruelle trivial : $\{0\} \cup \{1\}$. Dans un travail (en cours) avec Oscar Bandtlow, on réalise ce programme en utilisant des produits de Blaschke dilatants (pour lesquels on a récemment pu calculer le spectre, voir [44]) et des homotopies analytiques pour "déformer" toute application analytique dilatante du cercle en un produit de Blaschke dilatant de même degré.
- La même remarque s'applique aux difféomorphismes d'Anosov du tore : les exemples algébriques (linéaires) ont tous un spectre de Ruelle trivial. Peut-on exhiber des familles d'exemples à spectre calculable (et non trivial) ?

Chapitre 3

Une minoration pour les résonances de Ruelle-Pollicott des flots

Dans ce chapitre, basé sur les articles [34, 23] et dans une moindre mesure [35], on explique une technique de "formule de trace" qui permet de montrer l'existence d'une infinité de résonances de Ruelle-Pollicott dans une bande explicite déterminée par la pression topologique. Le résultat présenté ici est plus précis que celui de [34] car on y a intégré des idées de [23]. On expose la preuve dans le cadre simplifié des semi-flots réels analytiques et on explique comment la même idée, combinée à une formule de trace locale, permet d'obtenir un résultat pour les flots d'Anosov C^∞ (sans hypothèse de contact).

3.1 Semi-flots réels analytiques

Soit $I := [0, 1] = \cup_{i=1}^p I_i$, où chaque $I_i = [a_i, b_i]$ est un intervalle fermé avec $\text{Int}(I_j) \cap \text{Int}(I_i) = \emptyset$ pour $i \neq j$. Sur chaque intervalle I_i , on se donne une bijection continue $T_i : I_i \rightarrow I$. On notera T l'application $T : I \rightarrow I$ définie par morceaux par

$$T|_{[a_i, b_i]} := T_i.$$

On suppose de plus qu'il existe un ouvert borné connexe $\Omega_0 \supset I$ avec $\Omega_0 \subset \mathbb{C}$ conférant les propriétés suivantes.

1. Les branches inverses $\gamma_i := T_i^{-1}$ ont une extension holomorphe à Ω_0 , continues sur $\overline{\Omega_0}$.
2. Pour tout $i = 1, \dots, p$, on a $\overline{\gamma_i(\Omega_0)} \subset \Omega_0$.

Ces hypothèses sont par exemples satisfaites si T est uniformément dilatante et les T_i sont réelles analytiques sur I . Les hypothèses ci-dessus forcent le

système dynamique $T : I \rightarrow I$ à être topologiquement mélangeant et uniformément dilatant (à itération de T près).

Pour définir un *semi-flot*, on se donne $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\tau(x) > 0$ pour tout $x \in I$. La fonction τ est communément appelée fonction "toit" ou "temps de retour". On suppose également que τ s'étend holomorphiquement à Ω_0 et continument à $\overline{\Omega}_0$. Le semi-flot $\Phi_t : X_\tau \rightarrow X_\tau$ est simplement défini comme le flot vertical $\phi_t(x, u) = (x, u + t)$ sur

$$X_\tau := \{(x, u) \in I \times \mathbb{R}^+ : 0 \leq u \leq \tau(x)\},$$

où on identifie $(x, \tau(x))$ avec $(Tx, 0)$.

Les mesures T -invariantes qui nous intéressent sont les *mesures d'équilibres* associées à des potentiels Hölder. Soit donc g une fonction Hölder sur $I = [0, 1]$. On sait alors qu'il existe une unique mesure μ_g , T -invariante réalisant le sup suivant (appelé pression topologique).

$$P(g) := \sup_{\mu} \left(h_{\mu}(T) + \int_I g d\mu \right),$$

le sup étant pris sur toutes les mesures de probas T -invariantes, et $h_{\mu}(T)$ est l'entropie de Kolmogorov-Sinai. De la même façon, soit G une fonction Hölder sur X_τ , et posons

$$P(G) := \sup_{\mu^\tau} \left(h_{\mu^\tau}(\Phi_1) + \int_{X_\tau} G d\mu^\tau \right).$$

Il existe alors un unique état d'équilibre $\mu^\tau(G)$. On peut montrer (voir par exemple [38], chapitre 6), que l'état d'équilibre $\mu^\tau(G)$ se calcule par la formule

$$\int_{X_\tau} F d\mu^\tau(G) = \frac{1}{\int \tau d\mu_g} \int_0^1 \int_0^{\tau(x)} F(x, u) du d\mu_g,$$

où g est la fonction Hölder sur I donnée par

$$g(x) = \int_0^{\tau(x)} G(x, u) du.$$

La pression $P(G)$ est alors l'unique réel c tel que $P(g - c\tau) = 0$. Le cas particulier $G \equiv -h_{top}$ donne la mesure d'entropie maximale du flot et

$$G(x, u) = \frac{-\log |T'(x)|}{\tau(x)}$$

donne la mesure absolument continue (SRB).

Une autre manière de calculer la pression $P(G)$ est via *la formule d'équidistribution de Bowen*, voir [38] chapitre 7¹. Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des orbites périodiques du flot Φ_t , et si $\mathcal{C} \in \mathcal{P}$, on note $\ell(\mathcal{C})$ sa longueur (période). Si $P(G) > 0$, on a alors lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$\sum_{\ell(\mathcal{C}) \leq x} e^{\int_{\mathcal{C}} G} \sim \frac{e^{xP(G)}}{P(G)}. \quad (3.1)$$

Pour l'application que nous en ferons ici, on retiendra que l'asymptotique ci-dessus implique la minoration

$$\sum_{x-1 \leq \ell(\mathcal{C}) \leq x+1} e^{\int_{\mathcal{C}} G} \geq C e^{xP(G)},$$

pour tout x suffisamment grand et une constante $C > 0$.

Notre sujet d'étude ici est la vitesse de mélange. Se donnant F, H deux fonctions (par exemple continues sur X_τ) et une mesure d'équilibre Φ_t -invariante $\mu^\tau(G)$ associée à un potentiel G , on pose

$$\text{Cor}_G(F, H)(t) := \int (F \circ \Phi_t) H d\mu^\tau - \int F d\mu^\tau \int H d\mu^\tau,$$

qui mesure la décorrélation asymptotique quand $t \rightarrow +\infty$. Il est connu depuis Dolgopyat [10], voir aussi Pollicott [41], que si τ n'est pas cohomologue à une fonction constante², et si F, H sont Hölder, alors la vitesse de décroissance de cette fonction de corrélation est exponentielle. Pour étudier plus quantitativement ce mélange, on peut considérer la transformée de Laplace

$$L_{F,H}^{(G)}(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st} \text{Cor}_G(F, H)(t) dt,$$

qui est analytique dans le demi-plan $\{\text{Re}(s) > 0\}$. Introduisons une notation supplémentaire : si $F \in C(X_\tau)$, on pose

$$\mathcal{M}(F)(x) := \int_0^{\tau(x)} F(x, u) du.$$

1. Il faut supposer que le flot est topologiquement faiblement mélangeant, voir [38] pour une définition ad hoc. Nous supposons donc cette hypothèse satisfaite pour la suite.

2. Dans aucun de ces deux articles, cette condition apparait de manière claire, voir l'article de Tsujii [47], où une preuve montrant que cette condition implique le mélange exponentiel est présentée.

On rappelle que l'espace de Bergmann sur Ω_0 est donné par

$$A^2(\Omega_0) := \left\{ f : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{C} : \text{holomorphe et } \int_{\Omega_0} |f|^2 dV < \infty \right\},$$

où dV est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$. On note aussi $H_0 := U(\Omega_0)$ l'espace de Banach des fonctions holomorphes sur Ω_0 , admettant une extension continue à $\overline{\Omega_0}$, normé par la norme sup usuelle. Dans [34], on démontre le résultat suivant.

Proposition 3.1.1 *Supposons que $\mathcal{M}(F)$, $\mathcal{M}(G)$, $\mathcal{M}(H)$ sont dans H_0 . Alors la transformée de Laplace $L_{F,H}^{(G)}(s)$ admet une extension méromorphe à $\mathbb{C}$. De plus si $s \in \mathbb{C}$ est un pôle alors 1 est valeur propre de l'opérateur de transfert $\mathcal{L}_s : A^2(\Omega_0) \rightarrow A^2(\Omega_0)$ défini par*

$$\mathcal{L}_s(f)(z) := \sum_{i=1}^p e^{-s\tau(\gamma_i z) + g(\gamma_i z)} f(\gamma_i z),$$

où $g = \mathcal{M}(G)$. Réciproquement, si 1 est une valeur propre de $\mathcal{L}_s$, alors pour des (F, H) génériques dans $H_0 \times H_0$, s est un pôle de $L_{F,H}^{(G)}(s)$.

La preuve de ce résultat est simplement basée sur une réécriture de la transformée de Laplace faisant intervenir la résolvante $(I - \mathcal{L}_s)^{-1}$. La méromorphie découle donc du théorème analytique de Fredholm, voir [34] pour les détails. Les pôles de cette extension méromorphe de la transformée de Laplace des corrélations sont appelés *résonances de Ruelle-Pollicott*. Ils déterminent le comportement asymptotique de la vitesse de mélange. Si le mélange est exponentiel, alors il y a une bande sans résonance du type $\{-\epsilon \leq \operatorname{Re}(s) \leq 0\}$, où $\epsilon > 0$. On suppose dorénavant pour simplifier que $P(G) = 0$ ce qui ne nuit pas à la généralité et simplifie les écritures, pour avoir l'énoncé général il suffit de remplacer G par $G - P(G)$. Dans ce chapitre, on expose le résultat suivant.

Théorème 3.1.2 *Sous les hypothèses précédentes, Il existe un sous-ensemble générique³ $\mathcal{G} \subset H_0 \times H_0$ tel que pour tout $(F, H) \in \mathcal{G}$, pour tout $\epsilon > 0$, $L_{F,H}^{(G)}(s)$ a une infinité de pôles dans la bande*

$$\left\{ \frac{3}{2}P(2G) - \epsilon \leq \operatorname{Re}(s) \leq 0 \right\}.$$

3. Un G_δ dense.

Il y donc un barrière naturelle à la vitesse de mélange qui ne peut donc pas être super-exponentielle : il n'y aurait dans ce cas pas de résonances. C'est un effet de la non uniformité hyperbolique du semi-flot : la direction verticale est neutre et crée de multiples résonances. La constante $3/2$ est certainement non-optimale et est un artefact de la preuve employée. En revanche le terme $P(2G)$ est précis et nous dit de nombreuses choses sur la vitesse de mélange. Supposons par exemple que G soit le potentiel SRB et que Φ_t possède une orbite périodique $\mathcal{C}_0$, correspondant à un point périodique x_0 de T , avec $T^n x_0 = x_0$. On a alors

$$0 \geq P(2G) \geq -2 \log |(T^n)'(x_0)|.$$

Ainsi si le taux de dilatation le long de cette orbite $|(T^n)'(x_0)|$ est proche de 1 (orbite presque neutre), il y a des résonances de Ruelle-Pollicott de partie réelle proche de zéro : la vitesse de mélange SRB est donc directement influencée par les exposant de Lyapounov.

3.2 Opérateurs de transfert et estimées a priori

Dans ce qui suit on va donner une idée de la preuve du théorème 3.1.2. On résume ci dessous quelques propriétés spectrales de la famille d'opérateurs $\mathcal{L}_s$ indispensable à la suite.

Proposition 3.2.1 *Agissant sur $A^2(\Omega_0)$, les opérateurs $\mathcal{L}_s$ vérifient les propriétés suivantes.*

1. *Les opérateurs $\mathcal{L}_s$ sont compacts à trace.*
2. *La suite de valeurs propre $(\lambda_n(\mathcal{L}_s))_{n \in \mathbb{N}}$, ordonnée par module décroissant satisfait*

$$|\lambda_n(\mathcal{L}_s)| \leq C e^{C|s|} \rho^n,$$

où $0 < \rho < 1$ et $C > 0$ est une constante.

3. *Le rayon spectral $r(\mathcal{L}_s)$ satisfait*

$$r(\mathcal{L}_s) \leq e^{P(-\operatorname{Re}(s)\tau + g)}.$$

Ces estimées découlent essentiellement de [2]. De ces propriétés spectrales on peut en tirer l'estimée a priori suivante (fondamentale pour ce qui suit).

Lemme 3.2.2 *Soit $M > 0$. Alors il existe $C_M > 0$ tel que pour tout $s \in \{-M \leq \operatorname{Re}(s) \leq 0\}$ avec $|\operatorname{Im}(s)|$ grand on a*

$$\log |\det(I - \mathcal{L}_s)| \leq C_M |\operatorname{Im}(s)|.$$

Le déterminant $Z_g(s) := \det(I - \mathcal{L}_s)$, qui est une fonction entière sur $\mathbb{C}$, est l'outil essentiel de la preuve : ses zéros sont (aux résidus et à la multiplicité près) les résonances de Ruelle-Pollicott. L'estimée précédente est essentielle pour contrôler la croissance de cette fonction dans les bandes verticales et effectuer une déformation de contour (voir dessous). Notons que pour $\operatorname{Re}(s) > 0$, on a l'expression convergente

$$Z_g(s) = \exp \left(- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Tr}(\mathcal{L}_s^n) \right),$$

où "Tr" désigne la trace. Cette trace se calcule de manière classique (par exemple avec le théorème des résidus et l'expression du noyau de Bergmann) comme

$$\operatorname{Tr}(\mathcal{L}_s^n) = \sum_{T^n x = x} \frac{e^{-s\tau^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)}}{1 - [(T^n)'(x)]^{-1}},$$

où la somme porte sur tous les points T^n -fixes et où on a noté

$$\tau^{(n)}(x) := \tau(x) + \tau(Tx) + \dots + \tau(T^{n-1}x).$$

3.3 La preuve en quelques lignes

En combinant le Lemme précédent et cette expression dynamique du déterminant on montre (voir [23]) la "formule de trace approchée" suivante. Notons $\mathcal{R}_g$ l'ensemble des zéros de $Z_g(s)$. Soit φ une fonction C^∞ à support compact dans $(0, +\infty)$. Posons pour tout $s \in \mathbb{C}$,

$$\psi(s) := \int_0^{+\infty} e^{sx} \varphi(x) dx.$$

Proposition 3.3.1 *Supposons qu'il existe $A < 0$ tel que $\mathcal{F}_A := \mathcal{R}_g \cap \{\operatorname{Re}(s) > A\}$ soit fini, alors pour tout $\epsilon > 0$ petit, on a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{T^n x = x} \frac{\tau^{(n)}(x) e^{g^{(n)}(x)}}{1 - [(T^n)'(x)]^{-1}} \varphi(\tau^{(n)}(x)) = \sum_{z \in \mathcal{F}_A} \psi(z) + O \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x| |\psi(A + \epsilon + ix)| dx \right).$$

Cette formule établit un lien entre une somme pondérée sur les orbites périodiques du flot Φ_t et le spectre des résonances de Ruelle-Pollicott. La preuve est une simple application du théorème des résidus plus la formule d'inversion de la transformée de Fourier. La suite du raisonnement consiste donc à travailler par l'absurde : si il n'y a qu'un nombre fini de résonances dans

$\{\operatorname{Re}(s) > A\}$, on utilise la formule ci-dessus avec un "bon choix" de fonctions test ϕ en espérant obtenir une contradiction. La famille que nous utiliserons est la suivante. Fixons $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ avec $\varphi \geq 0$, $\operatorname{Supp}(\varphi) \subset [-2, +2]$ et $\varphi(x) = 1$ pour tout $x \in [-1, +1]$. Pour $\xi \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$, t grand, on pose

$$\varphi_{\xi,t}(x) := e^{-ix\xi} \varphi(x-t).$$

C'est une "ondelette" localisée en t et de fréquence ξ . Le paramètre t a pour vocation d'être pris grand. Posons donc

$$\mathcal{S}_{\xi,t} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{T^n x = x} \frac{\tau^{(n)}(x) e^{g^{(n)}(x)}}{1 - [(T^n)'(x)]^{-1}} e^{-i\xi \tau^{(n)}(x)} \varphi(\tau^{(n)}(x) - t).$$

Si on insère cette famille de fonctions test dans l'identité de la proposition précédente, on a donc

$$\mathcal{S}_{\xi,t} = \sum_{z \in \mathcal{F}_A} \psi_{\xi,t}(z) + O\left(e^{(A+\epsilon)t} |\xi|\right),$$

où $\psi_{\xi,t}(z)$ vérifie une estimée du type (pour tout $N \geq 0$),

$$|\psi_{\xi,t}(z)| \leq C_N \frac{e^{\operatorname{Re}(z)t}}{(1 + |\xi + \operatorname{Im}(z)|)^N}. \quad (3.2)$$

La suite de la preuve consiste à "moyenner en fréquence" ξ en considérant la quantité

$$\mathcal{G}(\sigma, t) := \sqrt{\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma \xi^2} |\mathcal{S}_{\xi,t}|^2 d\xi,$$

où σ va être pris petit, dépendant de t . En utilisant (3.2) avec $N = 1$, on a la majoration

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{G}(\sigma, t)}{2\sqrt{\sigma}} &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma \xi^2} \left| \sum_{z \in \mathcal{F}_A} \psi_{\xi,t}(z) \right|^2 d\xi + O\left(e^{2(A+\epsilon)t} \sigma^{-3/2}\right) \\ &\leq O(1) + O\left(e^{2(A+\epsilon)t} \sigma^{-3/2}\right), \end{aligned}$$

où le $O(1)$ est uniforme en t, σ .

D'un autre coté, on a en développant et en utilisant la formule donnant la transformation de Fourier d'une Gaussienne :

$$\mathcal{G}(\sigma, t) = \sqrt{\pi} \sum_{n,m} \frac{1}{nm} \sum_{T^n x = x; T^m y = y} \frac{\tau^{(n)}(x) \tau^{(m)}(y) e^{g^{(n)}(x) + g^{(m)}(y)}}{(1 - [(T^n)'(x)]^{-1})(1 - [(T^m)'(y)]^{-1})}$$

$$\times \varphi(\tau^{(n)}(x) - t) \varphi(\tau^{(m)}(y) - t) e^{-\frac{(\tau^{(n)}(x) - \tau^{(m)}(y))^2}{4\sigma}}.$$

C'est une somme de termes positifs que l'on va simplement minorer en ignorant les termes non diagonaux, ce qui donne :

$$\mathcal{G}(\sigma, t) \geq C^{-1} \sum_{n \geq 1} \sum_{\substack{T^n x = x \\ \tau^{(n)}(x) \in [t-2, t+2]}} e^{2g^{(n)}(x)},$$

où $C > 0$ est une grosse constante. Ceci peut se relire en terme d'orbites périodiques du flot Φ_t comme

$$\mathcal{G}(\sigma, t) \geq C^{-1} \sum_{\ell(\mathbb{C}) \in [t-2, t+2]} e^{\int_{\mathbb{C}} 2G},$$

En utilisant l'asymptotique (3.1) vue précédemment⁴, on a la minoration

$$\mathcal{G}(\sigma, t) \geq C' e^{tP(2G)}.$$

En combinant les estimées obtenues précédemment, on a donc pour t grand,

$$e^{tP(2G)} \leq O(\sqrt{\sigma}) + O(\sigma^{-1} e^{2(A+\epsilon)t}).$$

On choisit maintenant σ comme $\sigma = e^{-\alpha t}$, où $\alpha > 2|P(2G)|$. On observe alors une contradiction lorsque $t \rightarrow +\infty$ dès que $A < \frac{3}{2}P(2G)$ (ϵ pouvant être pris arbitrairement petit). Ceci conclut le schéma de la preuve. $\square$

3.4 Extension aux flots d'Anosov C^∞

Dans un récent travail [26], une formule de trace *locale* est prouvée dans un cadre de régularité C^∞ . Combinée aux idées exposées précédemment, elle permet d'exhiber une bande explicite avec une infinité de résonances de Ruelle Pollicott en fonction de la Pression topologique de 2 fois le Jacobien instable. Donnons quelques détails sur ce résultat. Soit X une variété Riemannienne compacte C^∞ , de dimension n et V un champ de vecteur C^∞ . On suppose que le flot $\varphi_t : X \rightarrow X$ généré par V est d'Anosov : le fibré tangent TX admet un "splitting" continu

$$T_x X = E_0(x) \oplus E_s(x) \oplus E_u(x),$$

4. Il faut l'appliquer à $\widetilde{G} := 2G + (1 + \delta)|P(2G)|$ avec $\delta > 0$ car ici $P(2G) \leq 0$.

tel que les distributions E_s et E_u soit invariantes par le flot et $E_0(x) = \mathbb{R}V(x)$. De plus, il existe une constante $C > 0$ et $\theta > 0$ tel que pour tout $x \in X$, on ait

$$|D_x \varphi_t(v)|_{\varphi_t(x)} \leq C e^{-\theta t} |v|_x, \quad v \in E_s(x) \quad t \geq 0,$$

$$|D_x \varphi_t(v)|_{\varphi_t(x)} \leq C e^{-\theta t} |v|_x, \quad v \in E_u(x) \quad t \leq 0.$$

Il est alors connu depuis le travail de Liverani [29] puis Faure-Sjostrand [14] et aussi Tsujii [48] que la résolvante

$$\left(\frac{1}{i}V - \lambda\right)^{-1} : L^2(X) \rightarrow L^2(X)$$

(bien définie pour $\text{Im}(\lambda) > 0$) admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$

$$\left(\frac{1}{i}V - \lambda\right)^{-1} : C^\infty(X) \rightarrow \mathcal{D}'(X).$$

Les pôles sont appelés, comme dans le cas précédent, résonances de Ruelle-Pollicott. Ce prolongement se fait en pratique en construisant des espaces de Sobolev anisotropes, adaptés à la structure Anosov. La formule de trace locale est la suivante. Reprenant les notations précédentes, pour tout $A > 0$, il existe une distribution tempérée F_A supportée sur $\mathbb{R}^+$ tel que

$$\sum_{\text{Im}(\mu) > -A} e^{-i\mu t} + F_A(t) = \sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{P}} \frac{\ell^\#(\mathcal{C}) \delta(t - \ell(\mathcal{C}))}{|\det(I - P_{\mathcal{C}})|}, \quad t > 0.$$

La sommation de gauche porte sur les résonances, et $\ell^\#$ désigne la "longueur primitive" de l'orbite périodique $\mathcal{C}$. De plus, (et c'est essentiel) la transformée de Fourier vérifie

$$|\widehat{F_A}(\lambda)| = O_\epsilon(|\lambda|^{2n+1}),$$

quand $|\lambda| \rightarrow +\infty$ et $\text{Im}(\lambda) < A - \epsilon$, pour tout $\epsilon > 0$. Il est crucial que l'exposant ci-dessus $(2n+1)$ ne dépende pas de A ! On rappelle que le potentiel SRB est défini par

$$\psi^u(x) = -\frac{d}{dt} \left(\log |\det D_x \varphi_t|_{E_u(x)} \right) \Big|_{t=0},$$

où le jacobien est calculé en utilisant la métrique Riemannienne. Clairement ψ^u dépend du choix d'une métrique mais pas sa pression topologique (en effet le long d'une orbite périodique, il n'en dépend pas). Ce potentiel possède au moins la régularité du feuilletage instable, c'est à dire Hölder.

On prouve alors le résultat suivant.

Théorème 3.4.1 *Supposons que $\varphi_t : X \rightarrow X$ soit un flot d'Anosov topologiquement faiblement mélangeant. Soit ψ^u le potentiel SRB associé au flot. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il y a une infinité de résonances de Ruelle-Pollicott dans la bande*

$$\{\mathrm{Im}(\lambda) > (2n + 3/2)P(2\psi^u) - \epsilon\}.$$

Comme dans le cas des semi-flots, on obtient comme corollaire la convergence de résonances de R-P vers le réel dès que l'exposant de Lyapounov instable le long d'une orbite périodique "dégénère" vers 0. En calculant la transformée de Laplace des fonctions de corrélations pour la mesure SRB, on en déduit aussi des majorations de la vitesse de mélange analogues à celles évoquées plus haut.

Chapitre 4

Equidistribution et séries d'Eisenstein en volume infini

Dans ce chapitre on décrit, dans le cadre simplifié des surfaces, le résultat principal d'équidistribution obtenu dans [18]. On évoque aussi le théorème d'équidistribution obtenu pour les restrictions à des segments géodésiques et son application au comptage de points nodaux obtenu dans [24].

4.1 Séries d'Eisenstein vues comme ondes planes

On note par $\mathbb{H}^2$ le plan hyperbolique, équipé de sa métrique à courbure constante -1 . Dans le modèle du demi-plan de Poincaré

$$\mathbb{H}^2 := \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\},$$

on a $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$. Dans le modèle du disque

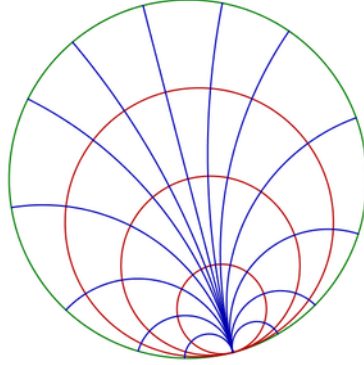
$$\mathbb{H}^2 := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

on prend $ds^2 = \frac{4dzd\bar{z}}{(1-|z|^2)^2}$. On notera $\partial\mathbb{H}^2$ le bord de l'espace hyperbolique. Fixant $\xi \in \partial\mathbb{H}^2$ et prenant deux points $z, w \in \mathbb{H}^2$, le *cocycle de Busemann* $B_\xi(z, w)$ est défini par

$$B_\xi(z, w) = \lim_{t \rightarrow \infty} d(z, \xi(t)) - d(w, \xi(t)),$$

où d est la distance hyperbolique et $\xi(t)$ est un rayon géodésique qui tend vers ξ quand $t \rightarrow \infty$. Le point à l'infini ξ et w étant fixés, les ensembles de niveaux de $z \mapsto B_\xi(z, w)$ sont des *horocycles* basés au point ξ . Les *ondes planes* de fréquence λ dans le plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$ sont alors définies par

$$E_\lambda^0(z, \xi) := e^{(1/2 + i\lambda)B_\xi(0, z)}.$$



Dans le modèle du demi-plan, on a par exemple la formule explicite

$$E_{\lambda}^0(x + iy, \xi) = \left(\frac{y}{|x + iy - \xi|^2} \right)^{1/2 + i\lambda}.$$

Ce sont des fonctions propres (non- L^2) du Laplacien hyperbolique Δ défini dans le demi-plan de Poincaré par

$$\Delta := -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right),$$

i.e. pour tout $\xi \in \partial\mathbb{H}^2$,

$$\Delta_z E_{\lambda}^0 = \left(\frac{1}{4} + \lambda^2 \right) E_{\lambda}^0.$$

Ces fonctions propres forment une famille complète au sens où si $f \in C_0^{\infty}(\mathbb{H}^2)$, on a la formule de décomposition

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\partial\mathbb{H}^2} \langle f, E_{\lambda}^0(., \xi) \rangle_{L^2} E_{\lambda}^0(x, \xi) d\sigma(\xi) \left| C\left(\frac{1}{2} + i\lambda\right) \right|^2 d\lambda,$$

où $C(s)$ est la fonction d'Harish-Chandra

$$C(s) = \pi^{-1/2} 2^{-s} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s - 1/2)}.$$

Ceci n'est rien d'autre que l'analogue non-euclidien de la transformée de Fourier et sa formule d'inversion. Cette construction s'étend à une classe de quotients de volume infini de $\mathbb{H}^2$ que nous allons décrire maintenant. Un groupe discret d'isométries Γ , finement engendré, est dit *convexe co-compact* ssi il est purement hyperbolique (pas d'éléments elliptiques ni paraboliques) et le quotient $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ est non-compact : il est alors automatiquement de volume

infini. D'un point de vue chirurgical, la surface quotient $X = \Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ peut être décomposée comme

$$X = X_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \dots \cup \mathcal{F}_{n_f},$$

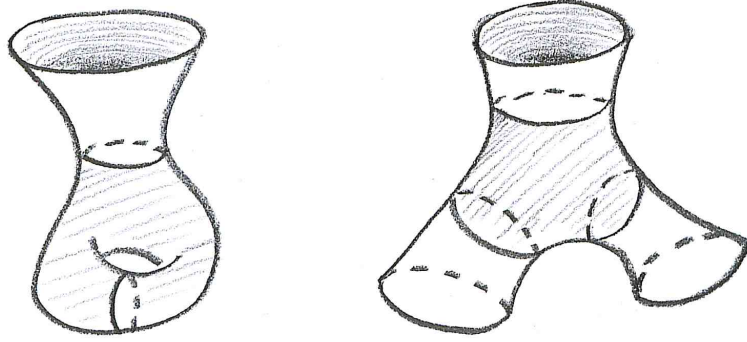
où X_0 est une surface à bord géodésique et $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{n_f}$ sont des vasques de volume infini (funnel). Chaque funnel $\mathcal{F}_j$ est isométrique à un cylindre à bord

$$(0, 2]_\rho \times (\mathbb{R}/\ell_j \mathbb{Z})_\theta,$$

équipé de la métrique

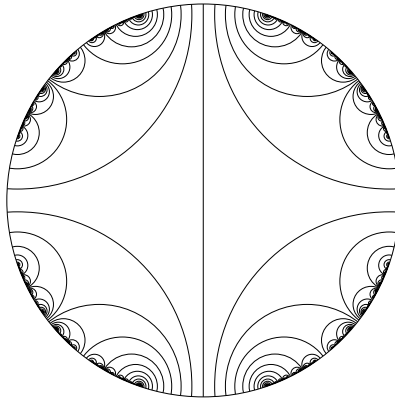
$$ds^2 = \frac{d\rho^2 + (1 + \rho^2/4)d\theta^2}{\rho^2},$$

avec $\rho = 0$ correspondant à l'infini et ℓ_j est la longueur du bord à $\rho = 2$.



L'ensemble limite de Γ , noté $\Lambda(\Gamma)$ est l'ensemble des points d'accumulation sur $\partial \mathbb{H}^2$ de toute orbite d'un point z de $\mathbb{H}^2$ sous l'action de Γ :

$$\Lambda(\Gamma) := \overline{\Gamma \cdot z} \cap \partial \mathbb{H}^2.$$



Ci dessus un groupe de Schottky convexe co-compact à deux générateurs et son action sur le disque hyperbolique. L'ensemble limite est toujours un Cantor dans le cas de la dimension 2. Par un théorème célèbre de Patterson [39], la *dimension de Hausdorff* $\delta(\Gamma)$ de l'ensemble limite $\Lambda(\Gamma)$ est aussi l'exposant caractéristique des séries de Poincaré :

$$\delta(\Gamma) = \inf \left\{ s \in \mathbb{R} : \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(z, \gamma z)} < +\infty \right\}.$$

Expliquons maintenant comment définir les séries d'Eisenstein sur le quotient X . On notera Δ_X le Laplacien sur X . Soit $R_X(s; z, w)$ le noyau de Schwartz de la résolvante

$$(\Delta_X - s(1-s))^{-1} : C_0^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$$

qui par Mazzeo-Melrose [31] admet un prolongement méromorphe (en s) à tout le plan complexe. Si s n'est pas un pôle, la limite quand $\rho \rightarrow 0^+$, avec $\xi \in \partial_\infty X$ ¹

$$E_s(z, \xi) := \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \rho^{-s} R_X(s; z, (\rho, \xi))$$

existe et donne une fonction propre du Laplacien Δ_X :

$$\Delta_X E_s(z, \xi) = s(1-s)E(s; z, \xi),$$

paramétrée par un point ξ à l'infini, appelée onde plane généralisée ou *série d'Eisenstein*. Le cas le plus physique correspond au paramètre $s = 1/2 + i\lambda$ qui donne

$$\Delta_X E_s(z, \xi) = \left(\frac{1}{4} + \lambda^2 \right) E_s(z, \xi).$$

Ces fonctions propres paramétrisent le spectre continu du Laplacien et donnent une résolution spectrale "explicite" via la formule de Stone, voir [3] chapitre 7 pour une preuve. Si de plus $\text{Re}(s) > \delta$, par convergence des séries de Poincaré on a (relevé à l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^2$),

$$E_s(z, \xi) = \widetilde{C}(s) \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{sB_\xi(0, \gamma z)},$$

où $\widetilde{C}(s)$ est un facteur hypergéométrique analogue à la fonction d'Harish-Chandra que l'on *omettra sans changer la notation* dans la suite (en effet, il ne dépend que de s). On retiendra donc que si $\delta(\Gamma) < 1/2$ on a une formule explicite pour calculer $E_{1/2+i\lambda}(z, \xi)$ en sommant sur le groupe Γ :

1. $\partial_\infty X$ désigne le bord à l'infini de X , ce qui correspond dans les coordonnées (ρ, θ) à un point $(0, \theta)$.

$$E_{1/2+i\lambda}(z, \xi) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{(1/2+i\lambda)B_\xi(0, \gamma z)}.$$

4.2 Théorèmes d'équidistribution

Dans l'article [18], on prouve le résultat suivant.

Théorème 4.2.1 *Supposons que $\delta(\Gamma) < \frac{1}{2}$ et soit $\varphi \in C_0^\infty(X)$. Alors lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$,*

$$\int_X |E_{1/2+i\lambda}(z, \xi)|^2 \varphi(z) dm(z) = \int_X E_1(z, \xi) \varphi(z) dm(z) + O_\xi(\lambda^{2\delta-1}),$$

où dm est la mesure de volume hyperbolique et $\xi \in \partial_\infty X$.

Ce théorème montre l'équidistribution à haute fréquence des mesures

$$|E_{1/2+i\lambda}(z, \xi)|^2 dm(z)$$

vers la mesure harmonique $E_1(z, \xi) dm(z)$, ceci sur tout compact de X . Il est important de noter que ce ne sont pas ici des mesures finies. Ce théorème est un analogue "non-compact" de l'ergodicité quantique prouvée par Zelditch et Colin de Verdière [50, 9] sur une variété compacte à flot géodésique ergodique. Le mécanisme d'équidistribution est toutefois totalement différent : ici c'est la propagation vers l'infini qui joue le rôle clé, plutôt que l'ergodicité du flot géodésique. Dans [18], on prouve aussi une version microlocale qui met en évidence la nature "fractale" de la mesure limite, que nous allons détailler.

Si $\xi \in \partial \mathbb{H}^2$, on note $\mathcal{L}_\xi$ le graphe

$$\mathcal{L}_\xi = \{(m, \nu_\xi(m)) \in S^* \mathbb{H}^2\},$$

où $\nu_\xi(m)$ est le (co)vecteur unitaire tangent en m à la géodésique pointant vers ξ à l'infini. On note

$$\mathcal{L}_\xi^\Gamma = \Pi(\overline{\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{L}_{\gamma\xi}}) \subset S^*X,$$

où $\Pi : S^* \mathbb{H}^2 \rightarrow S^*X$ est le revêtement naturel. L'ensemble $\mathcal{L}_\xi^\Gamma$ est a priori fractal car l'orbite $\Gamma \cdot \xi$ s'accumule sur l'ensemble limite qui est un Cantor. Soit $a \in C_c^\infty(S^*X)$ un symbole lisse compactement supporté sur la base, et soit A un opérateur pseudo-différentiel compactement supporté de symbole principal a . On a le résultat suivant.

Théorème 4.2.2 *Supposons $\delta < \frac{1}{2}$, alors il existe une mesure invariante par le flot géodésique μ_ξ , supportée sur $\mathcal{L}_\xi^\Gamma$ tel que lorsque $\lambda \rightarrow \infty$,*

$$\langle AE_{1/2+i\lambda}(\cdot, \xi), E_{1/2+i\lambda}(\cdot, \xi) \rangle_{L^2(X)} = \int_{S^*X} ad\mu_\xi + O(\lambda^{-1+2\delta}).$$

La mesure μ_ξ n'est pas de masse finie.

Un théorème plus général d'équidistribution en moyenne pour les ondes planes généralisées à été prouvé récemment par Dyatlov-Guillarmou [12], et est valable sous des hypothèses très faibles : l'ensemble des géodésiques captées doit être de mesure nulle. Evidemment, la convergence obtenue n'est valable qu'en moyenne : il faut intégrer en espace et sur un petit intervalle de fréquences.

Dans un article plus récent consacré à la structure nodale des séries d'Eisenstein [24], on est amené à prouver un résultat d'équidistribution analogue au Théorème 4.2.3 pour la restriction à des géodésiques. Soit $\xi \in \partial_\infty X$ un point à l'infini conforme de X ($\partial_\infty X$ s'identifie naturellement à $\partial\mathbb{H}^2 \setminus \Lambda(\Gamma)$ modulo Γ). Soit $\mathcal{C}$ une géodésique (complète) sur X . On dit que $\mathcal{C}$ est "non ξ -symétrique" ssi *il n'existe pas de géodésique partant de ξ et finissant en ξ à l'infini qui soit orthogonale à $\mathcal{C}$ ou égale à $\mathcal{C}$* . On a alors le résultat suivant.

Théorème 4.2.3 *Supposons que $\delta(\Gamma) < \frac{1}{2}$ et soit $\varphi \in C_0^\infty(X)$. Soit $\mathcal{C}$ une géodésique non ξ -symétrique. Alors on a*

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{\mathcal{C}} |E_{1/2+i\lambda}(z, \xi)|^2 \varphi(z) d\sigma(z) = \int_{\mathcal{C}} E_1(z, \xi) \varphi(z) d\sigma(z).$$

où $d\sigma$ est la mesure de longueur hyperbolique.

Essentiellement, en l'absence de "symétries", on obtient de l'équidistribution sur tout segment géodésique compact. La condition de non-symétrie est aussi présente dans les travaux précédents concernant l'ergodicité quantique de restriction sur les variétés compactes : voir le papier de Toth-Zelditch [46] et aussi Dyatlov-Zworski [13]. Elle est présente pour exclure les cas pathologiques où la fonction propre s'annulerait identiquement sur la courbe en question pour une infinité de valeurs propres. Dans notre cas, se fixant une géodésique $\mathcal{C}$, la condition de ξ -non symétrie est valide pour presque tout ξ . Ce théorème de restriction joue un rôle clé dans l'étude des lignes nodales.

4.3 Lignes nodales et nombre d'intersections

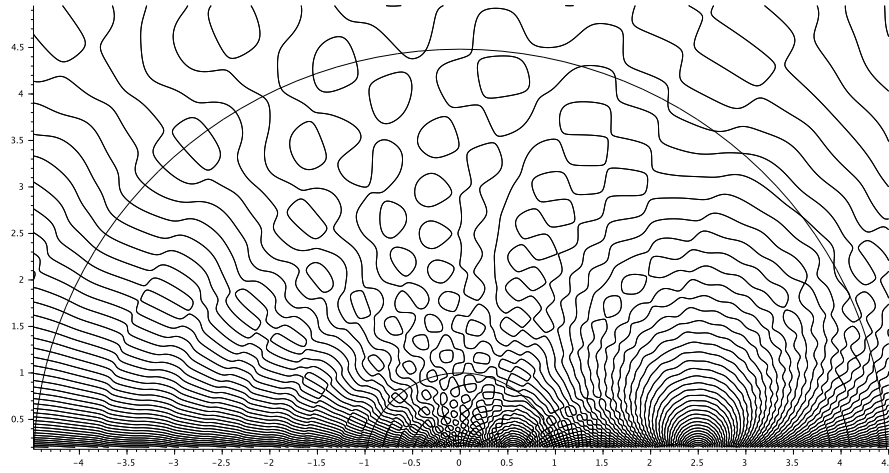
La problématique des ensembles nodaux des fonctions propres sur les variétés compactes est un sujet riche d'actualités qui a suscité un volume

très important de publications, et ce depuis Courant. On renvoie le lecteur au survey [49] pour un aperçu du sujet. Dans le cas du volume infini, il semble que peu de choses aient été étudiées. Pour parler de lignes nodales, il faut bien entendu travailler avec des fonctions propres à valeurs réelles. On supposera toujours que $\delta(\Gamma) < \frac{1}{2}$. On s'intéressera ici à

$$F_\lambda(z, \xi) := \operatorname{Re}(E_{1/2+i\lambda}(z, \xi)) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{\frac{1}{2}B_\xi(0, \gamma z)} \cos(\lambda B_\xi(0, \gamma z)),$$

qui est encore une fonction propre pour la valeur propre $1/4 + \lambda^2$. On peut toujours relever à $\mathbb{H}^2$ ces fonctions propres et essayer de visualiser numériquement les *lignes nodales*, qui sont les ensembles nuls de ces fonctions :

$$\mathcal{N}_\lambda(\xi) := \{z \in \mathbb{H}^2 : F_\lambda(z, \xi) = 0\}.$$

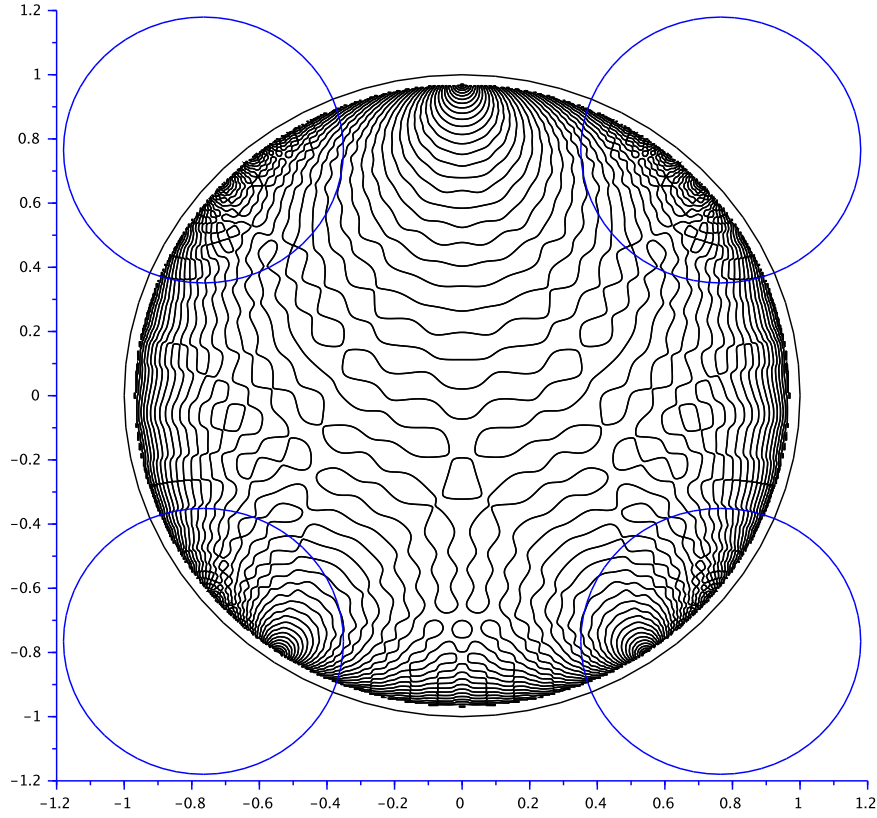


Ci dessus nous avons tracé numériquement $\mathcal{N}_\lambda(\xi)$ dans le demi-plan de Poincaré pour le cas d'un groupe élémentaire Γ engendré par l'isométrie hyperbolique

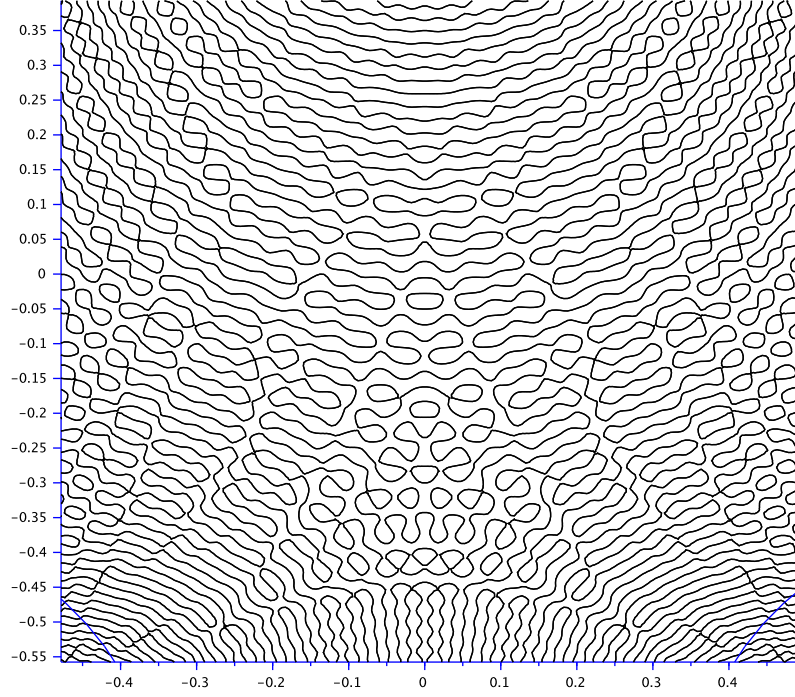
$$z \mapsto e^\ell z,$$

avec $\xi = 5/2$, $\ell = 1.5$ et $\lambda = 20$. Un domaine fondamental est donné par l'anneau délimité par les deux géodésiques.

Dans le cas d'un groupe de Schottky Γ non-élémentaire à deux générateurs, on représente ci-après les lignes nodales pour $\lambda = 30$, $\xi = +i$ dans le modèle du disque. Un domaine fondamental est situé à l'extérieur des 4 disques à bord géodésique.



Dans les deux cas, on constate comme attendu l'aspect "horocyclique" des lignes nodales au voisinage du point à l'infini ξ , qui est donné par i dans le tracé ci dessus. Dans le coeur convexe, des interférences créent des domaines nodaux compacts qui sont des disques topologiques. A haute fréquence, on observe une structure nodale plus complexe où les domaines nodaux non compacts s'entrelacent avec des îles compactes qui semblent proliférer, exhibant des topologies non simplement connexes.



Clairement il y a une infinité de domaines nodaux, il faut donc se restreindre à un compact. Le premier théorème classique que l'on peut répliquer sans peine dans ce cadre est l'estimée de Donnelly-Fefferman [11]. Puisque $F_\lambda(z, \xi)$ est une fonction propre d'un opérateur elliptique à coefficients réels analytiques, elle est automatiquement réelle analytique, ce qui peut se vérifier à la main quand $\delta(\Gamma) < \frac{1}{2}$. L'ensemble $\mathcal{N}_\lambda(\xi)$ est automatiquement rectifiable. Soit K un compact d'intérieur non vide. Il existe alors $C_K > 0$ tel que pour tout λ suffisamment grand,

$$C_K^{-1} \lambda \leq \sigma(\mathcal{N}_\lambda(\xi) \cap K) \leq C_K \lambda,$$

où σ est la mesure de longueur. Ceci montre que localement, la longueur des lignes nodales tend vers l'infini comme λ . Dans [24], on prouve le résultat suivant.

Théorème 4.3.1 *Soit $\mathcal{C}$ une géodésique complète non ξ -symétrique, pour tout segment géodésique compact $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}$, il existe $C_0 > 0$ tel que lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$,*

$$C_0^{-1} \lambda \leq \#(\mathcal{N}_\lambda(\xi) \cap \mathcal{C}_0) \leq C_0 \lambda.$$

Ce résultat compte à haute fréquence le nombre d'intersection des lignes nodales avec un bout de géodésique fixé. On a ici des bornes optimales. A noter que dans la littérature existante sur les variétés compactes, il existe peu de résultats de comptage optimaux : seul le travail de Bourgain et Rudnick sur le tore [5] donne des bornes comparables. On renvoie une nouvelle fois le lecteur à [49] pour un état de l'art et à [24] pour des références à des résultats dans ce sens sur les surfaces à courbure négative.

Un corollaire relativement immédiat de ce théorème est la densité de $\mathcal{N}_\lambda(\xi)$ dans X quand $\lambda \rightarrow +\infty$, chose bien connue dans le cas compact mais non évidente ici. Dans [24], on donne aussi des applications au comptage de domaines nodaux. Les résultats numériques soulèvent bien des questions, notamment sur la répartition et la densité des domaines nodaux compacts, qui conduiront prochainement à des expérimentations numériques.

4.4 Eléments de preuves

Pour clore ce chapitre, on donne une idée de la preuve du Théorème 4.2.3, en essayant de minimiser la technicité des arguments. On commence par tout relever à $\mathbb{H}^2$. On se fixe une fonction test $\varphi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{H}^2)$. On rappelle que ξ est un point "à l'infini conforme" donc $\xi \in \partial\mathbb{H}^2 \setminus \Lambda(\Gamma)$. Une première remarque est le lemme qui suit.

Lemme 4.4.1 *Soit K un compact de $\mathbb{H}^2$. Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \{1, 2\}^N$, il existe une constante $C := C_{K, \alpha}$ tel que*

$$\sup_{z \in K} \left| \partial_\alpha \left(e^{\frac{1}{2} B_\xi(0, \gamma z)} \right) \right| \leq C e^{-\frac{1}{2} d(0, \gamma 0)}$$

avec $z = x_1 + ix_2$ et $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{\alpha_N}}$.

Ce lemme garantit la convergence uniforme sur tout compact des séries d'Eisenstein dès que $\delta(\Gamma) < \frac{1}{2}$, par convergence des séries de Poincaré. Pour analyser

$$I(\lambda) := \int_{\mathbb{H}^2} \varphi_0(z) \left| E_{1/2+i\lambda}(z, \xi) \right|^2 dm(z),$$

on fait un simple échange de sommation série/intégrale pour observer que

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\mathbb{H}^2} e^{B_\xi(0, \gamma z)} \varphi_0(z) dm(z) + \\ &\quad \sum_{\gamma \neq \gamma'} \int_{\mathbb{H}^2} e^{\frac{1}{2}(B_\xi(0, \gamma z) + B_\xi(0, \gamma' z))} e^{i\lambda \Phi_{\gamma, \gamma'}(z)} \varphi_0(z) dm(z), \end{aligned}$$

avec

$$\Phi_{\gamma, \gamma'}(z) := B_\xi(0, \gamma z) - B_\xi(0, \gamma' z).$$

Le premier terme de la somme correspond à la contribution "diagonale" alors que le second est la contribution "non diagonale". La limite à haute fréquence doit donc être donnée par

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} I(\lambda) &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\mathbb{H}^2} e^{B_\xi(0, \gamma z)} \varphi_0(z) dm(z) \\ &= \int_{\mathbb{H}^2} \varphi_0(z) E_1(z, \xi) dm(z). \end{aligned}$$

Il faut donc prouver que le terme non diagonal tend vers 0, ce qui revient à estimer la décroissance des intégrales oscillantes

$$J_{\gamma, \gamma'}(\lambda) := \int_{\mathbb{H}^2} e^{\frac{1}{2}(B_\xi(0, \gamma z) + B_\xi(0, \gamma' z))} e^{i\lambda \Phi_{\gamma, \gamma'}(z)} \varphi_0(z) dm(z).$$

Un simple calcul basé sur la propriété de cocycle des fonctions de Busemann (et l'invariance par isométries) montre que (dans le modèle du disque par exemple)

$$\nabla_z \Phi_{\gamma, \gamma'} = 2 \frac{\gamma^{-1} \xi - \gamma'^{-1} \xi}{|z - \gamma^{-1} \xi|^2 |z - \gamma'^{-1} \xi|^2}.$$

Comme $\gamma \neq \gamma'$ et que l'action de Γ sur $\partial \mathbb{H}^2 \setminus \Lambda(\Gamma)$ est discontinue, on ne peut avoir

$$\gamma \xi = \gamma' \xi.$$

On en déduit donc que ces phases $\Phi_{\gamma, \gamma'}$ sont toutes non stationnaires, ce qui garantit déjà (par le théorème de convergence dominée et intégration par parties) que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \sum_{\gamma \neq \gamma'} J_{\gamma, \gamma'}(\lambda) = 0.$$

Pour obtenir un terme d'erreur, on prouve que pour tout $\gamma \neq \gamma'$

$$|\gamma \xi - \gamma' \xi| \geq C e^{-\min\{d(0, \gamma 0), d(0, \gamma' 0)\}}.$$

On a toujours $\gamma \xi \neq \gamma' \xi$ pour $\gamma \neq \gamma'$, mais ces deux points peuvent être exponentiellement proches. L'estimée ci-dessus montre que cette différence ne peut être arbitrairement petite. Pour conclure la preuve, on écrit alors

$$\sum_{\gamma \neq \gamma'} J_{\gamma, \gamma'}(\lambda) = \sum_{\substack{d(\gamma 0, 0) \leq T \\ d(\gamma' 0, 0) \leq T}} J_{\gamma, \gamma'}(\lambda)$$

$$+ \sum_{\substack{d(\gamma 0, 0) \geq T \\ \text{ou } d(\gamma' 0, 0) \geq T}} J_{\gamma, \gamma'}(\lambda).$$

La première somme étant finie, on utilise la phase non-stationnaire pour chacun de ses termes, ainsi que la minoration ci-dessus pour contrôler les petits diviseurs. La décroissance obtenue est en $O(\lambda^{-1} e^{2\delta T})$, ceci en utilisant la borne de croissance dans le groupe :

$$\#\{\gamma \in \Gamma : d(0, \gamma 0) \leq T\} = O(e^{\delta T}).$$

On procède de manière semblable pour l'autre somme, en prenant soin de n'intégrer par parties que sur des sommes finies, et on obtient une estimation du même ordre :

$$\sum_{\substack{d(\gamma 0, 0) \geq T \\ \text{ou } d(\gamma' 0, 0) \geq T}} J_{\gamma, \gamma'}(\lambda) = O(\lambda^{-1} e^{2\delta T}).$$

On termine la preuve en prenant $T = \log(\lambda)$. On a donc exposé ici le mécanisme "naïf" de la preuve. L'extension au cas pseudo se fait en passant au calcul semi-classique et en utilisant la propagation des états Lagrangiens, voir [18]. Ceci ramène au calcul fait ci-dessus. Dans [24], on utilise des idées semblables pour le cas d'une restriction à un segment géodésique : on tombe alors sur des intégrales oscillantes avec des phases stationnaires, possiblement dégénérées. Ceci n'est pas un obstacle majeur, tant qu'on ne cherche pas à préciser la vitesse de convergence comme on l'a fait ici. On renvoie le lecteur motivé à [24] pour plus de détails.

Une question naturelle et totalement ouverte est d'essayer d'étendre ce type de résultats au cas $\delta(\Gamma) \geq \frac{1}{2}$. Pour l'instant seul le théorème "en moyenne" obtenu par Dyatlov-Guillarmou [12] est valable.

La preuve du théorème d'intersection repose essentiellement sur le théorème d'équidistribution que l'on combine avec de l'analyse complexe pour la majoration et une estimée de la décroissance en moyenne pour la minoration, on renvoie une nouvelle fois à [24] pour plus de détails.

Chapitre 5

Densité et localisation des résonances sur $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$

5.1 Introduction et résultat

Dans ce chapitre on détaille le contenu de l'article [37] et on reprend les notations du chapitre précédent. On note $\mathbb{H}^2$ le plan hyperbolique usuel muni de sa métrique usuelle. Dans ce qui suit Γ est un groupe discret d'isométries, convexe co-compact.

On notera encore δ la dimension de l'ensemble limite $\Lambda(\Gamma)$. Le quotient

$$X = \Gamma \backslash \mathbb{H}^2$$

est une surface à courbure -1 , géométriquement finie, de volume infini, dont les bouts sont des "funnels", voir chapitre précédent.

On note enfin Δ_X le Laplacien hyperbolique sur X . On rappelle que d'après les travaux de Lax-Phillips [27], le spectre L^2 de Δ_X est constitué de :

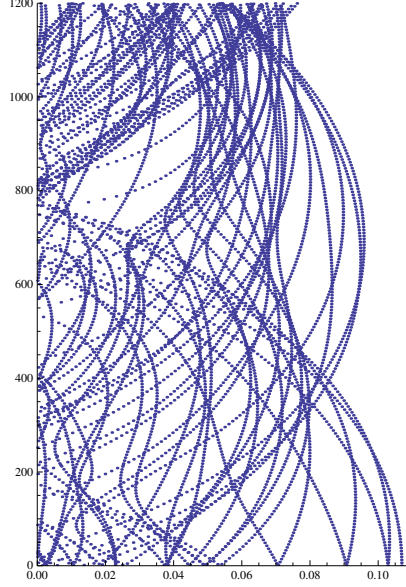
1. Le spectre ponctuel (fini) situé dans $(0, 1/4)$.
2. Le spectre absolument continu $[1/4, +\infty)$.
3. Pas de valeurs propres plongées dans $[1/4, +\infty)$.

De plus, si $\delta > 1/2$, $\delta(1 - \delta)$ est une valeur propre (Patterson, [39]) et c'est le bas du spectre L^2 . Si $\delta \leq 1/2$, le spectre ponctuel est vide. On notera aussi

$$R(s) := (\Delta_X - s(1 - s))^{-1} : L^2(X) \rightarrow L^2(X)$$

la résolvante, naturellement définie et analytique sur $\{\operatorname{Re}(s) > 1/2\}$, hormis pour un nombre fini de pôles correspondant au spectre ponctuel. D'après un théorème dû à Mazzeo-Melrose [31], $R(s) : C_0^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$ se prolonge méromorphiquement à $\mathbb{C}$. Les pôles sont appelés résonances, le développement

de Laurent à chaque pôle est fini, faisant apparaître des résidus de rang fini. On note $\mathcal{R} \subset \mathbb{C}$ l'ensemble des résonances.



Résonances d'un pantalon générique (merci à D.Borthwick).

Ci dessus un calcul numérique dans le cas d'une surface "pantalon" avec trois funnels. La résonance de plus grande partie réelle est δ . Il n'y a pas de résonances dans le demi plan $\{\text{Re}(s) > \delta\}$. D'un point de vue physique, la partie réelle (moins $\frac{1}{2}$) d'une résonance correspond à un taux d'amortissement alors que la partie imaginaire est une fréquence d'oscillation.

Décrivons ci-après les principaux résultats connus sur la densité et la répartition des résonances dans le demi plan "non-physique".

Si on pose

$$M(R) := \#\{\lambda \in \mathcal{R} : |\lambda| \leq R\},$$

cette fonction de comptage vérifie pour R suffisamment grand (preuve dans [21])

$$C^{-1}R^2 \leq M(R) \leq CR^2,$$

où $C > 0$ est une constante. On a donc une croissance (quadratique) dans les disques analogue à la loi de Weyl connue dans le cas co-fini. Ces bornes ne sont pas spécifiques à la courbure négative : pour toute perturbation compacte de la métrique, on a le même résultat.

En revanche, si on pose

$$N(\sigma, T) := \#\{\lambda \in \mathcal{R} : |\text{Im}(\lambda)| \leq T \text{ et } \sigma \leq \text{Re}(\lambda) \leq 1/2\},$$

on a alors (Zworski [51], Guillopé-Lin-Zworski [20])

$$N(\sigma, T) = O_\sigma(T^{1+\delta}).$$

C'est la borne de Weyl dite "fractale", par référence à l'asymptotique de Weyl pour les variétés compactes qui fait apparaître un exposant entier.

Conjecture 5.1.1 *Il existe σ tel que la borne supérieure en $O(T^{1+\delta})$ pour le comptage $N(\sigma, T)$ soit optimale.*

Le meilleur résultat connu à ce jour (Guillopé-Zworski, [19]) est une "minoration" sous-linéaire : pour tout $\epsilon > 0$, il existe σ_ϵ tel que

$$N(\sigma_\epsilon, T) = \Omega(T^{1-\epsilon}).$$

On sait de plus qu'il y a un trou spectral (voir [32]) : si $\delta \leq 1/2$, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que

$$\mathcal{R} \setminus \{\delta\} \subset \{\operatorname{Re}(s) \leq \delta - \epsilon_0\}.$$

Si $\delta > 1/2$, ce résultat découle trivialement de Lax-Phillips. On peut essayer de comprendre un peu mieux la structure de ce trou spectral, et on propose la conjecture suivante.

Conjecture 5.1.2 *Posons pour tout Γ convexe co-compact,*

$$G(\Gamma) := \inf \{\sigma \in \mathbb{R} : \mathcal{R} \cap \{\operatorname{Re}(s) \geq \sigma\} \text{ est fini}\}.$$

Alors on a $G(\Gamma) = \frac{\delta}{2}$.

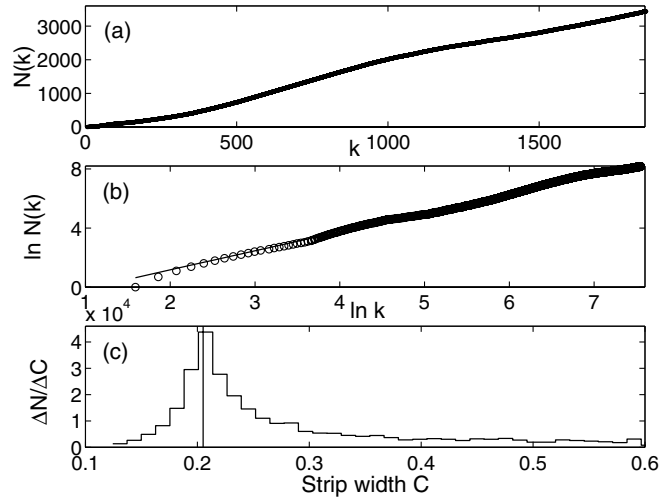
La quantité notée $G(\Gamma)$ est ce qu'on peut appeler le trou spectral "essentiel", autrement dit quelle est l'abscisse σ critique au delà de laquelle on aura une infinité de résonances dans la bande $\{\operatorname{Re}(s) \geq \sigma\}$? On sait de plus (voir le papier Jakobson-Naud [23]) que

$$\frac{\delta}{2} - \delta^2 \leq G(\Gamma) < \delta.$$

Si la conjecture 5.1.2 est vraie, il faut donc prendre $\sigma \leq \frac{\delta}{2}$ pour espérer observer une croissance optimale de $N(\sigma, T)$. Dans le cas où $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ est de volume fini, un résultat de Selberg montre que $G(\Gamma) = 1/2$, ce qui est bien consistant avec notre conjecture. Le but de ce chapitre est d'expliquer le résultat suivant.

Théorème 5.1.3 *Supposons Γ non-élémentaire. Pour tout $\sigma > \frac{\delta}{2}$, il existe $\tau(\sigma) < \delta$ tel que $N(\sigma, T) = O_\sigma(T^{1+\tau(\sigma)})$. De plus, il existe $\sigma_0 > \frac{\delta}{2}$ tel que l'on puisse prendre $\sigma \mapsto \tau(\sigma)$ analytique, strictement décroissante et strictement convexe sur $[\frac{\delta}{2}, \sigma_0]$, avec $\tau(\frac{\delta}{2}) = \delta$.*

La borne de Weyl $N(\sigma, T) = O(T^{1+\delta})$ est donc non optimale pour tout $\sigma > \delta/2$, et la conjecture $G(\Gamma) \leq \delta/2$ reste plausible au vu de ce résultat. Le seul analogue connu de ce résultat, à ce jour, est le théorème de déviations spectrales pour l'équation des ondes amorties de N. Anantharaman, voir le papier [1]. On mentionne que la fonction τ peut s'exprimer à l'aide d'une pression topologique, ce qui apparaîtra dans l'esquisse de preuve que l'on donne plus loin. D'un point de vue plus physique, des expérimentations numériques [30] pour les résonances du Laplacien Dirichlet à l'extérieur de trois disques montrent que la densité des résonances atteint un "pic" lorsque la largeur de la bande de comptage dépasse la moitié de la "vitesse de fuite classique" ce qui avec notre jeu de paramètres correspond à $\delta/2$.



Pic de densité pour les trois disques (merci à M. Zworski)

Il est important de citer aussi le récent travail numérique de Borthwick [4] sur les surfaces hyperboliques où cette même décroissance de la densité des résonances prédite par le précédent théorème s'observe plutôt bien dès que $\text{Re}(s) > \delta/2$. En revanche, en ce qui concerne la conjecture du trou spectral essentiel, les expérimentations numériques sont pour l'instant peu concluantes, voir encore Borthwick [4].

Les résonances sont aussi les zéros non triviaux de la fonction zêta de Selberg $Z_\Gamma(s)$ définie pour $\text{Re}(s) > \delta$ par

$$Z_\Gamma(s) := \prod_{k, \mathcal{C}} \left(1 - e^{-(s+k)l(\mathcal{C})}\right),$$

où $\mathcal{C}$ désigne les géodésiques périodiques primitives sur X . Cette correspondance parfaite entre résonances quantiques et zéros de fonction zêta est due à

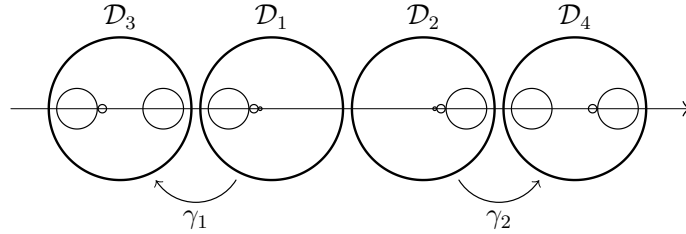
Patterson et Perry [40]. En ce sens, on peut voir le résultat précédent comme l'analogue d'un résultat de Selberg sur les zéros de la fonction zêta de Riemann $\zeta(s)$ dans la bande critique (voir par exemple Titchmarsh [45] chapitre 9) ($1/2 \leq \sigma \leq 1$)

$$N(\sigma, T) = O\left(T^{1-\frac{1}{4}(\sigma-\frac{1}{2})} \log T\right).$$

5.2 Déterminants et opérateurs de transfert

On esquisse ici la preuve du théorème 5.1.3. Elle repose sur des méthodes d'opérateurs de transfert liés à l'action du groupe Γ sur le bord de $\mathbb{H}^2$. Rappelons la construction classique de cet opérateur due à Bowen [6]. A une isométrie près, toute surface convexe co-compacte X peut être vue comme un quotient $X = \Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ où Γ est défini comme suit. On note $\widehat{\mathbb{C}}$ la sphère de Riemann.

- Soient $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_p, \mathcal{D}_{p+1}, \dots, \mathcal{D}_{2p}$ des disques ouverts euclidiens (d'adhérences disjointes), orthogonaux à $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \simeq \partial\mathbb{H}^2$.
- Soient $\gamma_1, \dots, \gamma_p \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ tels que pour tout i , $\gamma_i(\mathcal{D}_i) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathcal{D}_{p+i}}$.
- Le groupe $\Gamma := \langle \gamma_1, \dots, \gamma_p, \gamma_1^{-1}, \dots, \gamma_p^{-1} \rangle$ est appelé groupe de Schottky classique.



Dans le dessin ci dessus, on a $\gamma_1(\mathcal{D}_1) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathcal{D}_3}$, $\gamma_2(\mathcal{D}_2) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathcal{D}_4}$. Les petits disques intérieurs aux $\mathcal{D}_i$ sont les images par contractions des autres disques $\mathcal{D}_j$. Par exemple pour $\mathcal{D}_3$, les disques intérieurs sont de gauche à droite : $\gamma_1(\mathcal{D}_2)$, $\gamma_1(\mathcal{D}_4)$ et $\gamma_1(\mathcal{D}_3)$.

On définit l'espace de Bergman du disque $\mathcal{D}_j$ comme l'espace de Hilbert

$$H^2(\mathcal{D}_j) := \left\{ f : \mathcal{D}_j \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ holomorphe et } \int_{\mathcal{D}_j} |f|^2 < +\infty \right\}.$$

On posera $H^2 := \bigoplus_{j=1}^{2p} H^2(\mathcal{D}_j)$. L'opérateur de transfert $\mathcal{L}_s : H^2 \rightarrow H^2$ qui nous intéresse ici est donné par ($z \in \mathcal{D}_i$)

$$\mathcal{L}_s(f)(z) = \sum_{j \neq i} \gamma_j'(z)^s f(\gamma_j(z)).$$

Ici $s \in \mathbb{C}$ correspond au même paramètre spectral que dans la résolvante $R(s)$. Chacun des générateurs γ_i du groupe Γ agit ici (par composition) comme une contraction. C'est un opérateur compact à trace et on a l'identité remarquable (voir par exemple [20])

$$\det(I - \mathcal{L}_s) = Z_\Gamma(s).$$

Il est utile de considérer (et construire) des espaces analogues de H^2 , localisés à distance h de l'ensemble limite :

$$H^2(h) := \bigoplus_{j=1}^{N(h)} H^2(\mathcal{D}_j(h)),$$

et possédant de plus les propriétés suivantes :

1. $\text{diam}(\mathcal{D}_j(h)) \asymp h$.
2. $\cup_j \mathcal{D}_j(h) \cap \mathbb{R} = \Lambda(\Gamma) + [-h, +h]$.
3. $N(h) \asymp h^{-\delta}$.

Cette construction est rendue possible par les propriétés de quasi auto-similarité de l'ensemble limite Λ et la finitude de la mesure de Hausdorff δ -dimensionnelle de Λ . Sur chacun des $H^2(h)$ on a toujours l'identité

$$Z_\Gamma(s) = \det(I - \mathcal{L}_s)$$

qui reste valable. On dispose ainsi d'une famille d'espaces $H^2(h)$ dépendant d'un paramètre d'échelle h pour analyser le déterminant $Z_\Gamma(s)$.

La borne de Weyl fractale découle par sommation (et application de la formule de Jensen) de l'estimée ponctuelle suivante due à Guillopé-Lin-Zworski [20].

Théorème 5.2.1 *Soit $\sigma < \delta$. Il existe $C_\sigma > 0$ tel que pour tout $\sigma \leq \text{Re}(s) \leq \delta$ et $|\text{Im}(s)|$ grand, on a*

$$\log |Z_\Gamma(s)| \leq C_\sigma |\text{Im}(s)|^\delta.$$

Cette estimée ponctuelle implique la borne de Weyl fractale (et plus !)

"Preuve" : on a par les inégalités de Weyl, $\log |Z_\Gamma(s)| \leq \|\mathcal{L}_s\|_{Tr}$, où $\|\cdot\|_{Tr}$ est la norme trace calculée sur $H^2(h)$ avec $h = |\text{Im}(s)|^{-1}$. Prenant une base explicite $e_{k,j}(z)$ de $H^2(h)$ où $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \{1, \dots, N(h)\}$, on a par Cauchy-Schwarz

$$\|\mathcal{L}_s\|_{Tr} = \text{Tr}(\sqrt{\mathcal{L}_s^* \mathcal{L}_s}) \leq \sum_{j,k} \|\mathcal{L}_s(e_{k,j})\|_{H^2(h)}.$$

L'idée clé dans ce calcul est que chacun des termes $\|\mathcal{L}_s(e_{k,j})\|_{H^2(h)}$ se contrôle uniformément en h par une estimée du type ¹

$$\|\mathcal{L}_s(e_{k,j})\|_{H^2(h)} \leq C\rho^k,$$

avec $0 < \rho < 1$. Ainsi on a

$$\sum_{j,k} \|\mathcal{L}_s(e_{k,j})\|_{H^2(h)} \leq O\left(\sum_j \sum_k \rho^k\right) = O(h^{-\delta}),$$

et la preuve est finie. $\square$

5.3 Moyennes quadratiques

Pour prouver notre résultat, il faudra revisiter ces idées en moyenne et itérer l'opérateur de transfert. On considère donc la fonction zêta modifiée

$$Z_{\Gamma,N}(s) := \det(I - \mathcal{L}_s^N)$$

qui est un multiple de la fonction zêta de Selberg. A priori, cette fonction zêta modifiée aura plus de zéros que la fonction zêta initiale, mais la perte sera contrôlée par le fait que N sera choisi à croissance logarithmique. Le comptage des zéros dans les rectangles se fait en utilisant la formule de *Littlewood* en lieu et place de la formule de Jensen. Si on pose

$$\mathcal{Z}(\sigma, T) := \{\lambda \in [\sigma, \delta] + i[T, 2T] : Z_{\Gamma,N}(\lambda) = 0\},$$

alors pour $N = O(\log T)$, on a par intégration de contour ²

$$2\pi \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}(\sigma, T)} (\operatorname{Re}(\lambda) - \sigma) = \int_T^{2T} \log |Z_{\Gamma,N}(\sigma + it)| dt + O(T). \quad (5.1)$$

Cette identité permet de majorer la fonction de comptage $N(\sigma_0, T)$ pour tout $\sigma_0 > \sigma$, après sommation. Il faut donc estimer finement le terme

$$\int_T^{2T} \log |Z_{\Gamma,N}(\sigma + it)| dt.$$

1. C'est ici que le fait que $\Omega(h)$ soit un h -voisinage complexe de l'ensemble limite est utile : la croissance exponentielle en $|\operatorname{Im}(s)|$ de $\gamma_j(z)^s$ pour z complexe est "tuée" par la taille du h -voisinage si $h = |\operatorname{Im}(s)|^{-1}$.

2. Pour obtenir un terme d'erreur en $O(T)$, il faut contrôler l'argument de la fonction zêta, ce qui se fait à l'aide d'une estimée ponctuelle du même type que celle de Guillopé-Lin-Zworski et d'un lemme classique d'analyse complexe, voir Titchmarsh [45], chapitre 9.

En utilisant les inégalités de Weyl comme précédemment, on a donc par Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \int_T^{2T} \log |Z_{\Gamma,N}(\sigma + it)| dt &\leq \sum_{j,k} \int_T^{2T} \|\mathcal{L}_{\sigma+it}^N(e_{k,j})\|_{H^2(h)}^2 dt, \\ &\leq T \sum_{j,k} \left(\int_T^{2T} \|\mathcal{L}_{\sigma+it}^N(e_{k,j})\|_{H^2(h)}^2 \frac{dt}{T} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

C'est donc sur les moyennes quadratiques suivantes que doivent porter nos efforts :

$$\int_{\mathbb{R}} \|\mathcal{L}_{\sigma+it}^N(e_{k,j})\|_{H^2(h)}^2 d\mu_T(t)$$

où $d\mu_T$ est une "version lissée" de la mesure de probabilité $\chi_{[T,2T]} \frac{dt}{T}$. Si on pose $\Omega(h) := \cup_j \mathcal{D}_j(h)$ et $s = \sigma + it$, $h = T^{-1}$, $N = [\nu \log T]$, on a

$$\begin{aligned} &\int \|\mathcal{L}_{\sigma+it}^N(e_{k,j})\|_{H^2(h)}^2 d\mu_T(t). \\ &= \sum_{\alpha,\beta} \int_{\Omega(h)} \gamma_\alpha(z)^\sigma \overline{\gamma_\beta(z)}^\sigma e_{k,j} \circ \gamma_\alpha(z) \overline{e_{k,j} \circ \gamma_\beta(z)} \widehat{\mu_T}(\Phi_{\alpha,\beta}(z)) dm(z). \end{aligned}$$

La somme double ci-dessus porte sur les mots du groupe Γ de longueur N formés avec les générateurs $\gamma_1, \dots, \gamma_p; \gamma_1^{-1}, \dots, \gamma_p^{-1}$. On a noté $\widehat{\mu_T}$ la transformée de Fourier de μ_T qui vérifie la décroissance $\widehat{\mu_T}(x) = O((Tx)^{-\infty})$. On a aussi noté $\Phi_{\alpha,\beta}(z) = \log \gamma'_\alpha(z) - \log \gamma'_\beta(z)$. Si on imagine³ qu'il existe $C > 0$ et $0 < \theta < 1$ tel que pour tout N et $\alpha \neq \beta$

$$\inf_{\Omega(h)} |\Phi_{\alpha,\beta}| \geq C\theta^N,$$

alors on a pour un choix de ν suffisamment petit ($N = [\nu \log h^{-1}]$)

$$\int_{\mathbb{R}} \|\mathcal{L}_{\sigma+it}^N(e_{k,j})\|_{H^2(h)}^2 d\mu_T(t) \leq C\rho^k \sum_{\alpha} \int_{\Omega(h)} |\gamma_\alpha(z)|^{2\sigma} dm(z) + O(\rho^k h^\infty),$$

pour un certain $0 < \rho < 1$ uniforme en h . Par le Théorème de Ruelle-Perron-Frobenius, on contrôle le terme principal :

$$\sum_{\alpha} \int_{\Omega_j(h)} |\gamma_\alpha(z)|^{2\sigma} dm(z) \asymp e^{2NP(2\sigma)} \asymp T^{2\nu P(2\sigma)},$$

3. La réalité est un petit peu plus compliquée : les "phases" $\Phi_{\alpha,\beta}$ peuvent très bien s'annuler sur l'ensemble limite, mais on sait montrer que leur dérivée est contrôlable ce qui suffit en fait pour conclure, voir [37] dernière section.

où $x \mapsto P(x)$ est la pression topologique.

La *pression topologique* peut être dans ce cadre définie comme suit. Si $f : \Omega \subset \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ est un système dynamique *conforme* et *hyperbolique*, on pose $\Lambda(f) := \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(\Omega)$ (le répulseur de f). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit

$$e^{P(x)} := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{f^n w = w} e^{-x \log |(f^n)'(w)|} \right)^{1/n}.$$

La fonction $x \mapsto P(x)$ est strictement décroissante, convexe, analytique. Elle s'annule en $x = \delta$ où δ est la dimension de Hausdorff du répulseur $\Lambda(f)$. C'est la *formule de Bowen* [6]. Pour nous $\Lambda(f) = \Lambda(\Gamma)$ et $f : \Omega := \cup_j \mathcal{D}_j \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ est l'application de Bowen-Series définie simplement par $f(z) = \gamma_i(z)$ si $z \in \mathcal{D}_i$.

En résumé, si $\sigma > \delta/2$, $P(2\sigma) < 0$ et donc il existe $\epsilon(\sigma) > 0$ tel que

$$\int \|\mathcal{L}_{\sigma+it}^N(e_{k,j})\|_{H^2(h)}^2 d\mu_T(t) = O(\rho^k T^{-\epsilon(\sigma)}).$$

Ce gain de décroissance en T permet de battre la borne en $T^{1+\delta}$, cqfd. Nous avons volontairement occulté un certain nombre de difficultés techniques, en particulier le contrôle des phases "non-diagonales" $\Phi_{\alpha,\beta}(z)$ au voisinage de l'ensemble limite. Une extension de ce résultat en dimension supérieure est parfaitement possible dans le cas où Γ est un groupe Kleinien convexe co-compact, admettant une partition de Markov, il faut pour cela faire un usage systématique des noyaux de Bergmann et de remplacer les estimées en norme trace par des estimées Hilbert-Schmidt, plus souples d'utilisation.

Récemment, avec D. Jakobson [25], nous nous sommes intéressés aux sous-groupes convexes co-compacts de $PSL_2(\mathbb{Z})$ et leurs sous-groupes de "congruence". On y prouve une version "congruence" du théorème de ce chapitre avec une preuve légèrement plus simple où on exploite le caractère totalement discontinu de l'ensemble limite. J'ai choisi de ne pas inclure cette preuve ici car elle me paraît moins conceptuelle et ne fonctionne pas dans les cas de dimension supérieure (où précisément l'ensemble limite peut être continu, i.e. les groupes quasi-fuchsien).

Bibliographie

- [1] Nalini Anantharaman. Spectral deviations for the damped wave equation. *Geom. Funct. Anal.*, 20(3) :593–626, 2010.
- [2] Oscar F. Bandtlow and Oliver Jenkinson. On the Ruelle eigenvalue sequence. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 28(6) :1701–1711, 2008.
- [3] David Borthwick. *Spectral theory of infinite-area hyperbolic surfaces*, volume 256 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2007.
- [4] David Borthwick. Distribution of resonances for hyperbolic surfaces. *Exp. Math.*, 23(1) :25–45, 2014.
- [5] Jean Bourgain and Zeév Rudnick. Restriction of toral eigenfunctions to hypersurfaces and nodal sets. *Geom. Funct. Anal.*, 22(4) :878–937, 2012.
- [6] Rufus Bowen. Hausdorff dimension of quasicircles. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (50) :11–25, 1979.
- [7] T. Christiansen. Several complex variables and the distribution of resonances in potential scattering. *Comm. Math. Phys.*, 259(3) :711–728, 2005.
- [8] T. J. Christiansen. Several complex variables and the order of growth of the resonance counting function in Euclidean scattering. *Int. Math. Res. Not.*, pages Art. ID 43160, 36, 2006.
- [9] Y. Colin de Verdière. Ergodicité et fonctions propres du laplacien. *Comm. Math. Phys.*, 102(3) :497–502, 1985.
- [10] Dmitry Dolgopyat. On decay of correlations in Anosov flows. *Ann. of Math. (2)*, 147(2) :357–390, 1998.
- [11] Harold Donnelly and Charles Fefferman. Nodal sets of eigenfunctions on Riemannian manifolds. *Invent. Math.*, 93(1) :161–183, 1988.
- [12] Semyon Dyatlov and Colin Guillarmou. Microlocal limits of plane waves and Eisenstein functions. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 47(2) :371–448, 2014.

- [13] Semyon Dyatlov and Maciej Zworski. Quantum ergodicity for restrictions to hypersurfaces. *Nonlinearity*, 26(1) :35–52, 2013.
- [14] Frédéric Faure and Johannes Sjöstrand. Upper bound on the density of Ruelle resonances for Anosov flows. *Comm. Math. Phys.*, 308(2) :325–364, 2011.
- [15] David Fried. The flat-trace asymptotics of a uniform system of contractions. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 15(6) :1061–1073, 1995.
- [16] Colin Guillarmou and Frédéric Naud. Wave 0-trace and length spectrum on convex co-compact hyperbolic manifolds. *Comm. Anal. Geom.*, 14(5) :945–967, 2006.
- [17] Colin Guillarmou and Frédéric Naud. Wave decay on convex co-compact hyperbolic manifolds. *Comm. Math. Phys.*, 287(2) :489–511, 2009.
- [18] Colin Guillarmou and Frédéric Naud. Equidistribution of Eisenstein series on convex co-compact hyperbolic manifolds. *Amer. J. Math.*, 136(2) :445–479, 2014.
- [19] L. Guillopé and M. Zworski. The wave trace for Riemann surfaces. *Geom. Funct. Anal.*, 9(6) :1156–1168, 1999.
- [20] Laurent Guillopé, Kevin K. Lin, and Maciej Zworski. The Selberg zeta function for convex co-compact Schottky groups. *Comm. Math. Phys.*, 245(1) :149–176, 2004.
- [21] Laurent Guillopé and Maciej Zworski. Upper bounds on the number of resonances for non-compact Riemann surfaces. *J. Funct. Anal.*, 129(2) :364–389, 1995.
- [22] Dmitry Jakobson and Frédéric Naud. Lower bounds for resonances of infinite-area Riemann surfaces. *Anal. PDE*, 3(2) :207–225, 2010.
- [23] Dmitry Jakobson and Frédéric Naud. On the critical line of convex co-compact hyperbolic surfaces. *Geometric and Functional Analysis (GAFA)*, 22(2) :352–368, 2012.
- [24] Dmitry Jakobson and Frédéric Naud. On the nodal lines of eisenstein series on schottky surfaces. *Preprint*, 2015.
- [25] Dmitry Jakobson and Frédéric Naud. Resonances and density bounds for convex co-compact congruence subgroups of $SL_2(\mathbb{Z})$. *To appear in Israel J. Math.*, 2015.
- [26] Long Jin and Maciej Zworski. A local trace formula for Anosov flows. *Preprint*, 2014. With Appendix by Frédéric Naud.
- [27] Peter D. Lax and Ralph S. Phillips. Translation representation for automorphic solutions of the non-Euclidean wave equation I, II, III. *Comm. Pure. Appl. Math.*, 37,38 :303–328, 779–813, 179–208, 1984, 1985.

- [28] Pierre Lelong and Lawrence Gruman. *Entire functions of several complex variables*, volume 282 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [29] Carlangelo Liverani. On contact Anosov flows. *Ann. of Math. (2)*, 159(3) :1275–1312, 2004.
- [30] Wentao Lu, Sridhar Srinivas, and Maciej Zworski. Fractal weyl laws for chaotic open systems. *Phys. Rev. Lett.*, **91**(15), 2003.
- [31] Rafe R. Mazzeo and Richard B. Melrose. Meromorphic extension of the resolvent on complete spaces with asymptotically constant negative curvature. *J. Funct. Anal.*, **75**(2) :260–310, 1987.
- [32] Frédéric Naud. Expanding maps on Cantor sets and analytic continuation of zeta functions. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 38(1) :116–153, 2005.
- [33] Frédéric Naud. Precise asymptotics of the length spectrum for finite-geometry Riemann surfaces. *Int. Math. Res. Not.*, (5) :299–310, 2005.
- [34] Frédéric Naud. Entropy and decay of correlations for real analytic semi-flows. *Ann. Henri Poincaré*, 10(3) :429–451, 2009.
- [35] Frédéric Naud. Heat kernels and the rate of mixing of compact extensions of expanding maps. *Preprint*, 2011.
- [36] Frédéric Naud. The Ruelle spectrum of generic transfer operators. *Discrete Contin. Dyn. Syst. A*, (32) :2521–2531, 2012.
- [37] Frédéric Naud. Density and location of resonances for convex co-compact hyperbolic surfaces. *Invent. Math.*, 195(3) :723–750, 2014.
- [38] William Parry and Mark Pollicott. Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics. *Astérisque*, (187-188) :268, 1990.
- [39] S. J. Patterson. The limit set of a Fuchsian group. *Acta Math.*, **136**(3-4) :241–273, 1976.
- [40] S. J. Patterson and Peter A. Perry. The divisor of Selberg’s zeta function for Kleinian groups. *Duke Math. J.*, **106**(2) :321–390, 2001. Appendix A by Charles Epstein.
- [41] Mark Pollicott. On the mixing of Axiom A attracting flows and a conjecture of Ruelle. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **19**(2) :535–548, 1999.
- [42] Thomas Ransford. *Potential theory in the complex plane*, volume 28 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

- [43] David Ruelle. Zeta-functions for expanding maps and Anosov flows. *Invent. Math.*, 34(3) :231–242, 1976.
- [44] Julia Slipantschuk, Oscar F. Bandtlow, and Wolfram Just. Analytic expanding circle maps with explicit spectra. *Nonlinearity*, 26(12) :3231–3245, 2013.
- [45] E. C. Titchmarsh. *The theory of the Riemann zeta-function*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, second edition, 1986. Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown.
- [46] John A. Toth and Steve Zelditch. Quantum ergodic restriction theorems : manifolds without boundary. *Geom. Funct. Anal.*, 23(2) :715–775, 2013.
- [47] Masato Tsujii. Decay of correlations in suspension semi-flows of angle-multiplying maps. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 28(1) :291–317, 2008.
- [48] Masato Tsujii. Contact Anosov flows and the Fourier-Bros-Iagolnitzer transform. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 32(6) :2083–2118, 2012.
- [49] Steve Zelditch. Eigenfunctions and nodal sets. In *Surveys in differential geometry. Geometry and topology*, volume 18 of *Surv. Differ. Geom.*, pages 237–308. Int. Press, Somerville, MA, 2013.
- [50] Steven Zelditch. Uniform distribution of eigenfunctions on compact hyperbolic surfaces. *Duke Math. J.*, 55(4) :919–941, 1987.
- [51] Maciej Zworski. Dimension of the limit set and the density of resonances for convex co-compact hyperbolic surfaces. *Invent. Math.*, 136(2) :353–409, 1999.