

**Polycopié du cours 1MA003**  
*Constructions et raisonnements*  
*mathématiques*  
**Année 2023/2024**



## Table des matières

Chapitre 1. Outillage	1
1. Langage mathématique	1
1.1. Connecteurs logiques	1
1.2. Avec des ensembles	4
1.3. Et des fonctions	6
2. Nombres réels	9
3. Nombres complexes	12
 Chapitre 2. Analyse	 15
1. Suites	15
1.1. Convergence des suites complexes	15
1.2. Bornes supérieure et inférieure	19
1.3. Résultats spécifiques aux suites réelles	21
1.4. Sous-suites	24
2. Continuité et dérivabilité	28
2.1. Limites et continuité	28
2.2. Propriétés globales des fonctions continues	31
2.3. Fonctions dérivables	32
2.4. Propriétés globales des fonctions dérivables	35
2.5. Fonctions réciproques, nouvelles fonctions usuelles	38
3. Suites récurrentes	44
3.1. Bien définie ?	44
3.2. Représentation graphique	45
3.3. Sens de variation	47
3.4. Convergence et points fixes	48
4. Intégration	53
4.1. Introduction	53
4.2. Intégrale des fonctions en escalier	53
4.3. Intégrales inférieure et supérieure	57
4.4. Intégrabilité	59
4.5. Compléments sur l'intégrale	64
 Chapitre 3. Algèbre linéaire	 71
1. Espaces vectoriels	71
1.1. Espaces vectoriels	71
1.2. Sous-espaces vectoriels	74
1.3. Bases	77
1.4. La dimension d'un espace vectoriel	80
1.5. Sous-espaces et dimension.	84
1.6. Produits d'espaces vectoriels	86

1.7.	Application aux suites récurrentes d'ordre deux	87
2.	Applications linéaires	91
2.1.	Définition et premières propriétés	91
2.2.	Applications linéaires et sous espaces vectoriels	95
2.3.	Théorème du rang	97
2.4.	Traduction matricielle de l'action d'une application linéaire	99
2.5.	Changement de base	105
3.	Diagonalisation	108
3.1.	Motivation	108
3.2.	Eléments propres	108
3.3.	Diagonalisabilité	110
3.4.	Diagonalisation : raffinement	113
3.5.	Diagonalisation simultanée	116
3.6.	Et...	118
3.7.	Crédits	118

## Outillage

### 1. Langage mathématique

Les mathématiciens se sont récemment dotés d'une langue symbolique pour noter certaines constructions grammaticales de base, d'un usage important dans leur science. Nous allons passer en revue ces constructions, leur notation, et leurs propriétés. La science étant l'étude de ce qu'on peut réfuter (K. Popper), nous insisterons sur la notion de négation.

On appellera *proposition* un énoncé susceptible d'être vrai ou faux. On dit d'une proposition  $P$  qu'elle possède une *valeur de vérité*, notée  $V$  (vrai) ou  $F$  (faux). On pourrait aussi noter 1 ou 0. On parle de logique binaire.

L'activité mathématique consiste à s'assurer que des propositions sont vraies, sachant que d'autres – les hypothèses – le sont.

**1.1. Connecteurs logiques.** Ils permettent de combiner des propositions afin d'en fabriquer une nouvelle. Celle-ci est *définie* par sa table de vérité, qui exprime sa valeur de vérité en fonction de celle des propositions initiales.

Le premier exemple est la *négation*. Si  $P$  est une proposition, sa *négation*, notée  $\text{non } P$ , est donnée par la table de vérité suivante :

$P$	$\text{non } P$
$V$	$F$
$F$	$V$

La première ligne de ce tableau dit que si la valeur de vérité de  $P$  est  $V$ , celle de  $\text{non } P$  est  $F$  ; autrement dit, si  $P$  est vraie,  $\text{non } P$  est fausse. De même, quand  $P$  est fausse,  $\text{non } P$  est vraie.

Etant donnés deux propositions  $P$  et  $Q$ , on définit leur *conjonction*  $P$  et  $Q$  et leur *disjonction*  $P$  ou  $Q$  par leurs tables de vérité :

$P$	$Q$	$P$ et $Q$	$P$ ou $Q$
$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$V$
$F$	$V$	$F$	$V$
$F$	$F$	$F$	$F$

Le « et » est celui du langage usuel. Le « ou » mathématique est toujours *inclusif* : «  $P$  ou  $Q$  est vraie » signifie que l'une des deux propositions, au moins, est vraie ; elles peuvent être vraies toutes les deux.

Énonçons quelques propriétés de base, utiles pour nier les propositions.

- $P$  et  $\text{non}(\text{non } P)$  ont même valeur de vérité ;
- $\text{non}(P \text{ et } Q)$  et  $(\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)$  ont même valeur de vérité ;
- $\text{non}(P \text{ ou } Q)$  et  $(\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)$  ont même valeur de vérité.

Ces affirmations se vérifient en établissant les tables de vérité de chacune des propositions mentionnées. Par exemple, pour voir la deuxième propriété, on établit la table suivante.

$P$	$Q$	non $P$	non $Q$	(non $P$ ) ou (non $Q$ )
$V$	$V$	$F$	$F$	$F$
$V$	$F$	$F$	$V$	$V$
$F$	$V$	$V$	$F$	$V$
$F$	$F$	$V$	$V$	$V$

Et on observe que la dernière colonne est exactement l'opposée de celle de  $P$  et  $Q$ .

La base de tout raisonnement est la modélisation du « si..., alors... ». Si  $P$  et  $Q$  sont deux propositions, on note leur *implication*  $P \Rightarrow Q$  («  $P$  implique  $Q$  », ou « si  $P$  alors  $Q$  »), définie par la table

$P$	$Q$	$P \Rightarrow Q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$V$

#### REMARQUES 1.

- L'implication n'est pas la déduction. Quand on dit «  $P$  est vraie, donc  $Q$  est vraie », on sous-entend en fait le syllogisme suivant : «  $A$  est vraie ; or je sais que  $P \Rightarrow Q$  est vraie ; donc  $Q$  est vraie ». L'implication modélise le transfert de la véracité de  $P$  à celle de  $Q$ . Cela explique d'ailleurs pourquoi les deux dernières lignes de la table sont ce qu'elles sont : le fait que l'implication  $P \Rightarrow Q$  soit vraie n'apporte aucune information quand  $P$  est fausse. Quand on dit « s'il pleut, je vais au cinéma », on ne s'interdit quand même pas d'y aller quand il fait beau !
- Certains aiment écrire le symbole  $\Rightarrow$  à toutes les lignes d'un raisonnement : c'est mal. Déjà, c'est laid. Et puis, ce symbole  $\Rightarrow$  a une signification précise, qui n'est pas celle qu'on veut parfois lui prêter : il ne signifie pas « donc ». Si on pense « donc », pourquoi ne pas écrire « donc » ?

On peut vérifier que  $P \Rightarrow Q$  a la même valeur de vérité que (non  $P$ ) ou  $Q$  (exercice : dresser les tables de vérités de ces propositions pour le voir). Et en effet, « n'avancez pas ou je tire » veut bien dire « si vous avancez, je tire ».

Les négations de ces propositions ont donc la même valeur de vérité : non( $P \Rightarrow Q$ ) a la même table de vérité que  $P$  et non  $Q$ . Ainsi, pour nier une implication, on montre que  $P$  peut être vraie sans que  $Q$  soit vraie.

DEFINITION 1 (contraposée, réciproque). Soit  $P \Rightarrow Q$  une implication.

- Sa *contraposée* est (non  $Q$ )  $\Rightarrow$  (non  $P$ ).
- Sa *réciproque* est  $Q \Rightarrow P$ .

On peut voir que l'implication et sa contraposée ont la même table de vérité. Cela débouche sur la méthode de *démonstration par contraposée* : pour démontrer  $P \Rightarrow Q$ , il est parfois plus facile de démontrer non  $Q \Rightarrow$  non  $P$ , et cela revient pourtant au même.

EXEMPLE 1. Soit  $n$  un entier. On veut montrer que si  $n^2$  est pair,  $n$  est pair. La contraposée, plus naturelle, s'énonce ainsi : si  $n$  est impair,  $n^2$  est impair. On la vérifie en remarquant que le nombre impair  $n$  s'écrit  $n = 2p+1$ , avec  $p$  entier, de sorte que  $n^2 = 4p^2 + 4p + 1$  est manifestement impair. Cela prouve que si  $n^2$  est pair,  $n$  est pair.

Par contre, une implication et sa réciproque ne sont pas reliées entre elles : il n'y a aucun lien entre leurs valeurs de vérité.

Un dernier pour la route : l'équivalence. Si  $P$  et  $Q$  sont deux propositions, on note leur *équivalence*  $P \Leftrightarrow Q$  («  $P$  équivaut à  $Q$  », ou «  $P$  si et seulement si  $Q$  »), définie par la table

$P$	$Q$	$P \Leftrightarrow Q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$F$
$F$	$F$	$V$

On voit que  $P \Leftrightarrow Q$  est vraie lorsque  $P$  et  $Q$  ont même valeur de vérité. On dit alors que  $P$  et  $Q$  sont équivalentes. Et ainsi,  $P$  et  $Q$  sont équivalentes si, et seulement si, leur équivalence est vraie.

On voit aussi que  $P \Leftrightarrow Q$  est vraie si et seulement si  $P \Rightarrow Q$  et  $Q \Rightarrow P$  sont vraies. Démontrer une équivalence revient donc à prouver une implication *et* sa réciproque. On parle de *raisonnement par double implication*.

EXEMPLE 2. Soit  $n$  un entier. On veut montrer que  $n^2$  est pair si et seulement si  $n$  est pair. On a vu l'implication  $\Rightarrow$  dans l'exemple précédent. Reste à voir l'implication réciproque : si  $n$  est pair,  $n^2$  est pair. A nouveau, si  $n$  est pair, on écrit  $n = 2p$  avec  $p$  entier, de sorte que  $n^2 = 4p^2$  est manifestement pair. Cela prouve l'implication  $\Leftarrow$ , et donc finalement l'équivalence voulue.

Parfois, on peut raisonner par équivalence, c'est-à-dire passer de l'hypothèse à la conclusion par une chaîne d'équivalences. Mais il convient de ne pas en abuser (surtout si on n'a besoin que d'une implication). D'abord, ça ne marche pas si souvent. Et puis c'est périlleux, source d'erreur et difficile à rédiger. Le raisonnement par double implication est plus simple, plus naturel, plus sûr.

Que retenir de tout ceci ?

### Énoncé indispensable 1 : négations

- La négation de «  $P$  et  $Q$  » est « (non  $P$ ) ou (non  $Q$ ) ».
- La négation de «  $P$  ou  $Q$  » est « (non  $P$ ) et (non  $Q$ ) ».
- La négation de «  $P$  implique  $Q$  » est «  $P$  et (non  $Q$ ) ».

### Énoncé indispensable 2 : sur l'implication

- L'implication « P implique Q » est équivalente à sa contraposée « (non Q) implique (non P) ».
- L'équivalence « P équivaut à Q » signifie une double implication : « (P implique Q) et (Q implique P) ».

**1.2. Avec des ensembles.** Sans entrer dans les détails, un ensemble  $E$  est une collection d'objets. Un objet  $x$  de  $E$  est un élément de  $E$  : on note  $x \in E$  («  $x$  appartient à  $E$  »). Les connecteurs logiques ont une traduction ensembliste assez claire.

Quand on dispose de deux ensembles  $A$  et  $B$ , on peut réunir tous leurs objets dans un même ensemble  $A \cup B$ , l'union de  $A$  et  $B$ . On peut aussi considérer l'ensemble  $A \cap B$  des objets qu'ils ont en commun : c'est l'intersection de  $A$  et  $B$ . Par construction,

- $x \in A \cup B$  si et seulement si  $x \in A$  ou  $x \in B$  ;
- $x \in A \cap B$  si et seulement si  $x \in A$  et  $x \in B$ .

Si  $A$  est un ensemble dont tous les éléments appartiennent à un ensemble  $E$ , on dit que  $A$  est une partie de  $E$  ou que  $A$  est inclus dans  $E$ , ce que l'on note  $A \subset E$ . L'inclusion se traduit par une implication :  $x \in A$  implique  $x \in E$ .

On dit que deux ensembles  $A$  et  $B$  sont égaux s'ils sont les mêmes éléments. Cela revient à dire que les éléments de  $A$  appartiennent à  $B$  et les éléments de  $B$  appartiennent à  $A$  : l'égalité  $A = B$  traduit une double inclusion,  $A \subset B$  et  $B \subset A$ . Au niveau des éléments, cela revient à une double implication d'appartenance, c'est-à-dire à une équivalence :  $x \in A$  si et seulement si  $x \in B$ .

Quand un objet  $x$  de  $E$  n'appartient pas à  $A$ , on note  $x \notin A$ . Le complémentaire de  $A$  dans  $E$ , noté  $E \setminus A$ , est

$$E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\},$$

cette notation désignant l'ensemble des  $x$  de  $E$  tels que  $x \notin A$ . Quand l'ensemble  $E$  est clair dans le contexte, on note simplement  $A^c$ . Ainsi, pour un objet  $x$  de  $E$ ,  $x \in A^c$  si et seulement si non ( $x \in A$ ) : la négation logique se traduit par le passage au complémentaire ensembliste.

Les ensembles apparaissent dans les propositions mathématiques via deux types de quantificateurs.

**DEFINITION 2** (quantificateurs). Soit  $P(x)$  une proposition dépendant d'un objet  $x$  de l'ensemble  $E$ .

«  $\forall x \in E, P(x)$  » est la proposition disant que tous les éléments de  $E$  vérifient la propriété  $P$ .

«  $\exists x \in E, P(x)$  » est la proposition disant que l'un (au moins) des éléments de  $E$  vérifie la propriété  $P$ .

L'expression  $\forall x \in E$  se lit « pour tout  $x$  de  $E$  », tandis que  $\exists x \in E$  se lit « il existe  $x$  dans  $E$  tel que ». La notation admet des variantes : on note indifféremment  $\forall x \in E, P(x)$  ou  $\forall x \in E P(x)$  ou  $\forall x \in E : P(x)$  ou  $(\forall x \in E)(P(x))$ ...



EXEMPLE 3. Les quantificateurs permettent bien sûr d'indiquer qu'un ensemble  $E$  possède *au moins un* élément ; il suffit d'écrire : «  $\exists x \in E$  ». Mais comment dire que  $E$  possède *au plus un* élément ?

Premier essai : «  $\exists x_1 \in E, \text{non}(\exists x_2 \in E)$  ». *Incorrect.* En effet quand un mathématicien prend un objet  $x_1$ , puis un objet  $x_2$  même avec un nom différent, il a pu reprendre le même sous un autre nom, comme dans : « Soient  $k = 2$  et  $\ell = 2$  ». Donc cet énoncé est... toujours faux.

Deuxième essai : «  $\exists x_1 \in E, \text{non}(\exists x_2 \in E, x_2 \neq x_1)$  ». *Incorrect.* Cet énoncé affirme en particulier qu'il y a un  $x_1$  dans  $E$ , donc il dit aussi que  $E$  possède *au moins un* élément, ce qui n'est pas la même chose qu'*au plus un* car  $E$  pourrait être vide. En fait, il signifie que  $E$  possède un et un seul élément, ce qu'on note parfois «  $\exists! x \in E$  » (« il existe un unique... »).

Dire que  $E$  possède au plus un élément, c'est dire que si l'on en trouve deux, c'est en fait le même — sans prétendre qu'on peut en trouver un. La solution est donc «  $\forall x_1 \in E \forall x_2 \in E \ x_2 = x_1$  ».

Les énoncés mathématiques font souvent intervenir plusieurs quantificateurs à la suite. Quid de l'ordre ? On se convainc rapidement que deux  $\forall$  ou deux  $\exists$  peuvent se permuter : par exemple,  $\forall a \in A, \forall b \in B, \dots$  signifie la même chose que  $\forall b \in B, \forall a \in A, \dots$ . Mais on ne peut pas impunément permuter les quantificateurs  $\forall$  et  $\exists$  ! Les échanger modifie drastiquement le sens l'expression. Par exemple, la proposition

$$\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, x \leq y$$

est vraie puisque, pour tout entier naturel  $x$ , on peut choisir  $y = x$  et on aura bien  $x \leq y$ . Par contre, la proposition

$$\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, x \leq y$$

est fausse puisqu'elle réclame un nombre  $y$  plus grand que tous les entiers naturels  $x$  : il n'y en a pas (si on avait un tel  $y$ , en choisissant  $x = y + 1$ , on trouverait  $x > y$ ). Cet exemple est typique : le  $y$  dont on veut l'existence est autorisé ou non à dépendre du  $x$  selon l'ordre des quantificateurs ; et ça change tout.

Il est très important de savoir nier les expressions quantifiées. La négation de l'un des quantificateurs s'exprime avec l'autre :

### Énoncé indispensable 3 : négation des quantificateurs

- La négation de «  $\forall x \in E, P(x)$  » est «  $\exists x \in E, \text{non } P(x)$  ».
- La négation de «  $\exists x \in E, P(x)$  » est «  $\forall x \in E, \text{non } P(x)$  ».

La première ligne dit simplement que le contraire de « tous les éléments de  $E$  vérifient la propriété  $P$  » est « l'un des éléments de  $E$  ne la vérifie pas » (au moins). C'est la notion de *contre-exemple*.

Pour nier une expression mathématique, il reste à combiner tout ce qu'on a vu. Une négation s'écrit à la volée en respectant les règles suivantes :

- tout «  $\forall x \in E$  » est changé en «  $\exists x \in E$  » ;
- tout «  $\exists x \in E$  » est changé en «  $\forall x \in E$  » ;
- tout «  $P$  et  $Q$  » est changé en « (non  $P$ ) ou (non  $Q$ ) » ;

- tout «  $P$  ou  $Q$  » est changé en « (non  $P$ ) et (non  $Q$ ) » ;
- tout «  $P \Rightarrow Q$  » est changé en «  $P$  et (non  $Q$ ) ».

EXEMPLE 4. L'énoncé formel

$$(\forall a \in A)(\forall b_1 \in B)(\forall b_2 \in B)((a, b_1) \in \Gamma \text{ et } ((a, b_2) \in \Gamma) \Rightarrow (b_2 = b_1))$$

a pour négation :

$$(\exists a \in A)(\exists b_1 \in B)(\exists b_2 \in B)((a, b_1) \in \Gamma \text{ et } ((a, b_2) \in \Gamma) \text{ et } (b_2 \neq b_1)).$$

Son sens n'a pas d'importance ici, l'exercice est purement formel. On nie l'énoncé « en propageant la négation » :

$$\begin{array}{llllll} \text{non} \forall a \in A & \forall b_1 \in B & \forall b_2 \in B & ((a, b_1) \in \Gamma \text{ et } (a, b_2) \in \Gamma) & \Rightarrow & b_2 = b_1; \\ \exists a \in A & \text{non} \forall b_1 \in B & \forall b_2 \in B & ((a, b_1) \in \Gamma \text{ et } (a, b_2) \in \Gamma) & \Rightarrow & b_2 = b_1; \\ \exists a \in A & \exists b_1 \in B & \text{non} \forall b_2 \in B & ((a, b_1) \in \Gamma \text{ et } (a, b_2) \in \Gamma) & \Rightarrow & b_2 = b_1; \\ \exists a \in A & \exists b_1 \in B & \exists b_2 \in B & \text{non}((a, b_1) \in \Gamma \text{ et } (a, b_2) \in \Gamma) & \Rightarrow & b_2 = b_1; \\ \exists a \in A & \exists b_1 \in B & \exists b_2 \in B & (a, b_1) \in \Gamma \text{ et } (a, b_2) \in \Gamma & \text{ et } & \text{non}(b_2 = b_1); \\ \exists a \in A & \exists b_1 \in B & \exists b_2 \in B & (a, b_1) \in \Gamma \text{ et } (a, b_2) \in \Gamma & \text{ et } & b_2 \neq b_1. \end{array}$$

Ça a l'air monstrueux quand on détaille tout, mais *si l'énoncé est bien construit*, on le fait de tête sans difficulté. D'où l'importance de bien écrire ses énoncés, en écrivant les quantificateurs à gauche, dans l'ordre (!), en mettant des parenthèses pour éviter toute ambiguïté.

#### Test : écrire la négation de...

- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$  ;
- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  ;
- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| < \varepsilon$ .

### 1.3. Et des fonctions. On a l'intuition d'une fonction via son *graphe*.



La différence entre les deux dessins est le *test de la verticale* : un dessin est le graphe d'une fonction si et seulement si, quand on trace une droite verticale, on coupe le dessin *au plus une fois*. Formalisons cela. La verticale d'abscisse  $x \in \mathbb{R}$  est l'ensemble des points de coordonnées  $(x, y)$ , où  $y$  varie dans  $\mathbb{R}$  mais  $x$  reste fixé. Que la verticale d'abscisse  $x$  coupe la courbe au plus une fois signifie qu'il y a *au plus* un  $y \in \mathbb{R}$  tel que  $(x, y)$  soit sur la courbe.

On peut considérer des fonctions de  $A$  dans  $B$  pour deux ensembles quelconques. Ce qui était un « point du plan », est maintenant un élément  $(a, b)$  du produit cartésien  $A \times B$ , c'est-à-dire la donnée d'un élément  $a$  de  $A$  et d'un élément  $b$  de  $B$ . Et un « dessin » est juste un sous-ensemble  $\Gamma \subset A \times B$ .

DEFINITION 3. Un sous-ensemble  $\Gamma \subset A \times B$  est un *graphe (fonctionnel)* si, pour tout  $a \in A$ , il existe un unique  $b \in B$  tel que  $(a, b) \in \Gamma$ . On lui associe alors la *fonction*  $f : A \rightarrow B$  qui envoie  $a \in A$  sur l'unique  $b$  correspondant, avec la notation usuelle  $b = f(a)$ .

Très souvent, on emploiera le mot « application » pour parler d'une « fonction ». On note habituellement

$$\begin{array}{ccc} f : & A & \rightarrow & B \\ & a & \mapsto & f(a) \end{array}$$

et le graphe de  $f$  est  $\Gamma = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$ .

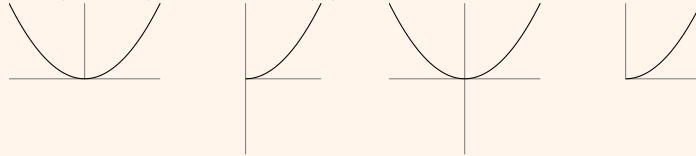
REMARQUES 2.

- Si  $b = f(a)$ , on dit que  $b$  est l'image de  $a$  par  $f$  ou que  $a$  est un antécédent de  $b$  par  $f$ .
- La donnée des ensembles  $A$  et  $B$  est indispensable. Changer l'un ou l'autre change la fonction.
- Si l'on veut éviter de prendre deux lignes, on peut écrire : «  $f : A \rightarrow B$  telle que  $f(a) = \dots$  » (ou une formulation analogue).
- Bien noter la différence entre les symboles «  $\rightarrow$  » et «  $\mapsto$  ». Les mathématiciens sont sans doute ridicules, mais ici la confusion les agace.

### Test : graphes

Associer à chacune des fonctions suivantes son graphe.

- $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(x) = x^2$ ;
- $f_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(x) = x^2$ ;
- $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que  $f(x) = x^2$ ;
- $f_4 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que  $f(x) = x^2$ .



REMARQUES 3.

- Si  $A' \subset A$ , on peut considérer la fonction  $g : A' \rightarrow B$  telle que  $g(x) = f(x)$ . C'est la restriction de  $f$  à  $A'$  et on note parfois  $g = f|_{A'}$ .
- Si  $A \subset A'$ , il existe des fonctions  $h : A' \rightarrow B$  telle que  $h(x) = f(x)$  pour tout  $x \in A$ . Ce sont des prolongements de  $f$  à  $A'$ .

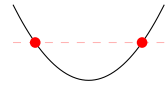
DEFINITION 4. Une fonction  $f : A \rightarrow B$  est dite *injective* si elle vérifie :

$$\forall a_1 \in A, \forall a_2 \in A, f(a_2) = f(a_1) \Rightarrow a_2 = a_1.$$

Cela signifie que tout élément  $b$  de  $B$  admet au plus un antécédent. Par contraposition, l'injectivité s'écrit aussi

$$\forall a_1 \in A, \forall a_2 \in A, a_2 \neq a_1 \Rightarrow f(a_2) \neq f(a_1).$$

Ainsi, deux éléments distincts de  $A$  ont deux images distinctes.



Pas injective



Injective

DEFINITION 5. La fonction  $f : A \rightarrow B$  est *surjective* si tout élément de  $B$  admet un antécédent par  $f$  :

$$\forall b \in B, \exists a \in A, f(a) = b.$$

**Test : injectivité, surjectivité**

Lesquelles des quatre fonctions du test précédent sont injectives ?  
Surjectives ?

DEFINITION 6. Une fonction  $A \rightarrow B$  est dite *bijective* si elle est à la fois injective et surjective.

Ainsi, une fonction  $f : A \rightarrow B$  est bijective si et seulement si tout élément de  $B$  admet un unique antécédent par  $f$ . On dit aussi que  $f$  est une bijection entre  $A$  et  $B$ .

EXEMPLE 5. Pour tout ensemble  $A$ , l'application identité de  $A$  est la fonction  $\text{id}_A : A \rightarrow A$  définie par  $\text{id}_A(a) = a$ . C'est bien sûr une bijection !

DEFINITION 7. Soient  $f : A \rightarrow B$  et  $g : B \rightarrow C$  deux fonctions. On appelle *composée* de  $f$  et  $g$  la fonction  $g \circ f$  telle que :

$$\forall a \in A, (g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

**Test : c'est quoi, ça ?**

On reprend les notations de la définition et on note  $\Gamma_f$  (resp.  $\Gamma_g$ ) le graphe de  $f$  (resp.  $g$ ). Qu'est-ce que

$$\{(a, c) \in A \times C : \exists b \in B (a, b) \in \Gamma_f \text{ et } (b, c) \in \Gamma_g\}$$

?

**REMARQUES 4.**

- L'application identité est toujours un élément neutre pour la composition : pour toute fonction  $f : A \rightarrow B$ ,  $f \circ \text{id}_A = \text{id}_B \circ f = f$ .
- La composition se comporte bien : si l'on a des fonctions  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$  et  $h : C \rightarrow D$ , alors  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$  (ce sont des fonctions  $A \rightarrow D$ ). On dit que la composition est *associative*. Cela permet de noter simplement  $h \circ g \circ f$ , sans parenthèses. (C'est exactement comme  $x + (y + z) = (x + y) + z$ , que l'on peut noter  $x + y + z$ .)
- Quand on écrit  $g \circ f$ , l'ordre est important :  $f \circ g$  n'a en général pas de sens (il faut que  $C = A$ ) et même si c'est le cas, il n'y a aucune raison pour que  $g \circ f$  et  $f \circ g$  soient égales. La composition n'est pas *commutative*.

**Test : stabilité par composition**

Démontrer que la composée de deux fonctions injectives (resp. surjectives, resp. bijectives) est injective (resp. surjective, resp. bijective).

PROPOSITION 1. *Une fonction  $f : A \rightarrow B$  est bijective si et seulement s'il existe une fonction  $f^{-1} : B \rightarrow A$  telle que  $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$  et  $f \circ f^{-1} = \text{id}_B$ .*

La fonction  $f^{-1}$  est alors la réciproque de  $f$ . C'est également une bijection, de réciproque  $f$ .

*Démonstration.* Supposons d'abord  $f$  bijective. Tout élément  $b$  de  $B$  admet alors un unique antécédent, qu'on baptise  $f^{-1}(b)$ . Cela définit une fonction  $f^{-1} : B \rightarrow A$ . Par construction, pour tout  $b \in B$ ,  $f^{-1}(b)$  est un antécédent de  $b$ , donc  $f(f^{-1}(b)) = b$  et, pour tout  $a \in A$ ,  $a$  est un (l'unique) antécédent de  $f(a)$ , donc  $f^{-1}(f(a)) = a$ . Cela prouve que  $f \circ f^{-1} = \text{id}_B$  et  $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$ .

Réciproquement, supposons qu'il existe une fonction  $f^{-1} : B \rightarrow A$  telle que  $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$  et  $f \circ f^{-1} = \text{id}_B$ . Si  $a_1$  et  $a_2$  sont deux éléments de  $A$  tels que  $f(a_1) = f(a_2)$ , on a  $f^{-1}(f(a_1)) = f^{-1}(f(a_2))$ ; puisque  $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$ , cela veut dire que  $a_1 = a_2$ . Donc  $f$  est injective. Pour tout  $b \in B$ , puisque  $f \circ f^{-1} = \text{id}_B$ , on peut écrire  $b = f(f^{-1}(b))$ . Donc  $f$  est surjective. Cela prouve que  $f$  est bijective.  $\diamond$

**2. Nombres réels**

Commençons par une description sommaire des ensembles de nombres qui vont nous occuper. Le but est essentiellement de fixer les notations, avant de dégager des propriétés fondamentales.

L'ensemble  $\mathbb{N}$  est celui des entiers naturels, familiers des étudiants d'école maternelle :

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

A partir de  $\mathbb{N}$ , on construit l'ensemble  $\mathbb{Z}$  des entiers relatifs en ajoutant les nombres négatifs :

$$\dots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

L'ensemble  $\mathbb{Q}$  des nombres rationnels s'obtient en considérant maintenant les fractions d'entiers :  $2/3, -7/12$ , etc.

Ces ensembles sont très concrets, on peut les expliquer à de jeunes enfants. La construction de l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels n'est pas aussi simple, ni aussi algébrique.

Un moyen assez concret d'aborder les nombres réels est leur écriture décimale : un nombre réel  $x$  est défini par son écriture décimale :

$$x = \pm c_k \dots c_1 c_0, d_1 d_2 \dots d_n \dots$$

Dans cette expression, les chiffres  $c_i$  et  $d_j$  sont des entiers naturels compris entre 0 et 9. Les chiffres avant la virgule  $c_0, \dots, c_k$  sont en nombre fini. Le chiffre  $c_0$  est celui des unités,  $c_1$  celui des dizaines, etc. Les chiffres après la virgule, notés  $d_j$ , sont en nombre infini ; ils peuvent être nuls à partir d'un certain rang, ou pas. Par exemple, on peut écrire  $1/2 = 0,500000\dots$ ,  $-100/3 = -33,333333\dots$ ,  $\pi = 3,1415926\dots$

On notera :

- $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels ;
- $\mathbb{R}_+$  l'ensemble des nombres réels positifs, c'est-à-dire ceux qui s'écrivent  $x = +c_k \dots c_0, d_1 d_2 \dots d_n \dots$  ;
- $\mathbb{R}_-$  l'ensemble des nombres réels négatifs, c'est-à-dire ceux qui s'écrivent  $x = -c_k \dots c_0, d_1 d_2 \dots d_n \dots$  ;
- $\mathbb{R}^*$  l'ensemble des nombres réels non nuls, i.e.  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ;
- $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}^* \cap \mathbb{R}_+$  l'ensemble des nombres réels strictement positifs ;
- $\mathbb{R}_-^* = \mathbb{R}^* \cap \mathbb{R}_-$  l'ensemble des nombres réels strictement négatifs.

L'avantage de cette approche des nombres réels est qu'elle est intuitive, usuelle. Mais il convient de remarquer ses limites. L'écriture décimale de  $x$  sous-entend une somme infinie

$$x = c_k \cdot 10^k + \dots + c_1 \cdot 10 + c_0 + d_1 \cdot \frac{1}{10} + d_2 \cdot \frac{1}{10^2} + \dots + d_3 \cdot \frac{1}{10^3} + \dots$$

à laquelle il faudrait donner un sens précis, ce que nous ne ferons pas ici. On peut remarquer qu'un nombre réel peut avoir deux écritures décimales : par exemple, les écritures décimales  $0,999999\dots$  (avec une infinité de 9) et  $1,000000\dots$  (avec une infinité de 0) désignent le même nombre réel, 1. L'idée est que la somme géométrique

$$\sum_{n=1}^N \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10} \frac{1 - \frac{1}{10^N}}{1 - \frac{1}{10}} = 1 - \frac{1}{10^N}$$

vaut exactement 1 quand  $N = +\infty$ . Enfin, cette présentation privilégie le nombre 10. On pourrait choisir un autre nombre comme base, par exemple 2 (ça s'appelle l'écriture binaire, familière des informaticiens). En fait, cela fournit différentes façons de décrire le même ensemble,  $\mathbb{R}$ .

Il existe plusieurs constructions rigoureuses de  $\mathbb{R}$  : coupures de Dedekind, complétion de  $\mathbb{Q}$  par ses suites de Cauchy... On renvoie aux cours de deuxième année pour plus de précision. Ici, nous supposons que le lecteur a une certaine intuition de l'axe réel et nous allons rappeler quelques éléments concernant *l'ordre* qui régit les nombres réels.

Les nombres réels sont ordonnés par les inégalités usuelles. Sans entrer dans les détails, pour comparer deux nombres réels, on compare leurs écritures décimales, chiffre par chiffre, depuis la gauche. Deux nombres réels  $x$  et  $y$  vérifient toujours  $x \leq y$  ou  $x \geq y$  (on parle d'ordre total) et la conjonction de ces deux inégalités caractérise l'égalité  $x = y$ . Le lecteur n'ignore pas que ces inégalités sont compatibles avec les opérations algébriques : on peut sommer les inégalités, les multiplier par un nombre positif... Attention aux pièges usuels :

- si  $x \leq y$  et  $a \in \mathbb{R}_-$ , alors  $ax \geq ay$  ;
- si  $x \leq y$ , avec  $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ , alors  $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$ .

En particulier, *pour majorer un quotient de nombres positifs, on majore le numérateur et on minore le dénominateur* : si  $0 \leq x \leq a$  et  $y \geq b > 0$ , alors  $\frac{x}{y} \leq \frac{a}{b}$ .

Dans ce texte, on notera les intervalles de la façon suivante : étant donnés deux réels  $a \leq b$ , on écrit l'intervalle ouvert  $]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ ,

le segment  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$  et les intervalles semi-ouverts  $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ ,  $[a, b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ . Les bornes exclues peuvent être  $+\infty$  ou  $-\infty$ . Par exemple, une partie  $\mathcal{A}$  de  $\mathbb{R}$  est majorée si elle est incluse dans un intervalle du type  $] -\infty, M]$  avec  $M \in \mathbb{R}$ ; et  $\mathcal{A}$  est minorée si  $\mathcal{A} \subset [m, +\infty[$  avec  $m \in \mathbb{R}$ .

Dans le chapitre sur les suites, on verra une propriété cruciale de l'ensemble ordonné  $\mathbb{R}$  : l'existence de bornes supérieures et inférieures (éventuellement infinies) pour n'importe quelle partie de  $\mathbb{R}$ . Grossièrement, ce sont les bornes du plus petit intervalle contenant cette partie.

Une conséquence très intuitive est la « propriété d'Archimède » : pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , il existe un entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n > x$ . Cette propriété sert tout le temps. Elle permet aussi de construire la partie entière  $E(x)$  de chaque réel  $x$  : c'est l'unique entier vérifiant l'encadrement

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

Autrement dit, c'est le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$  (cf. TD).

Une autre conséquence est que tout intervalle  $]a, b[$  non vide contient une infinité de nombres rationnels, mais aussi une infinité de nombres irrationnels (cf. TD).

Pour faire de l'analyse, on a besoin de mesurer la taille des choses : dans  $\mathbb{R}$ , la valeur absolue est l'outil de base, qu'il faut maîtriser avec assurance. Rappelons la définition de la valeur absolue : pour tout nombre réel  $x$ ,  $|x| = x$  si  $x \geq 0$  et  $|x| = -x$  si  $x \leq 0$ . On a donc toujours  $-|x| \leq x \leq |x|$ . On voit aussi que  $|x| = \max(x, -x)$  et  $|x| = \sqrt{x^2}$  en distinguant les cas où le réel  $x$  est positif ou négatif. De même, l'inégalité  $|x| \leq R$  signifie exactement que  $x$  appartient à l'intervalle  $[-R, R]$ .

La proposition suivante indique le lien entre la valeur absolue et les opérations algébriques : c'est très important en pratique.

#### Énoncé indispensable 4 : propriétés de la valeur absolue

Pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$  :

- (1)  $|xy| = |x| \times |y|$ ;
- (2)  $|x + y| \leq |x| + |y|$  (« inégalité triangulaire »);
- (3)  $|x + y| \geq ||x| - |y||$  (« inégalité triangulaire à l'envers »).

*Démonstration.*

- (1) La première propriété se voit en discutant sur les signes de  $x$  et  $y$ , ou bien en observant que l'égalité  $(xy)^2 = x^2 y^2$  entraîne  $\sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2} \sqrt{y^2}$ , donc  $|xy| = |x| |y|$ .
- (2) Puisque  $2xy \leq 2|x||y|$ , on a  $x^2 + y^2 + 2xy \leq x^2 + y^2 + 2|x||y|$ . En factorisant, il vient  $(x+y)^2 \leq (|x|+|y|)^2$ . En prenant la racine carrée, on obtient l'inégalité triangulaire  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .
- (3) Par inégalité triangulaire, on obtient

$$|x| = |x + y - y| \leq |x + y| + |-y| = |x + y| + |y|,$$

d'où  $|x| - |y| \leq |x + y|$ . En échangeant les rôles de  $x$  et  $y$ , on trouve aussi  $|y| - |x| \leq |x + y|$ . On en déduit

$$||x| - |y|| = \max(|x| - |y|, |y| - |x|) \leq |x + y|.$$

◇

REMARQUE 1. Une récurrence facile étend l'inégalité triangulaire à un nombre arbitraire de termes :  $\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$ .

REMARQUE 2. On dit qu'une partie  $\mathcal{A}$  de  $\mathbb{R}$  est *bornée* si elle est majorée et minorée. Cela revient à dire que la valeur absolue des éléments de  $A$  est majorée : il existe  $R \geq 0$  tel que pour tout  $a \in A$ ,  $|a| \leq R$ .

En effet, si on a un majorant  $M$  et un minorant  $m$  de  $\mathcal{A}$ , tout élément  $a$  de  $\mathcal{A}$  vérifie

$$-|m| \leq m \leq a \leq M \leq |M|,$$

donc  $a \in [-|m|, |M|]$ , donc  $|a| \leq R$  avec  $R = \max(|M|, |m|)$ . Réciproquement, si on a un nombre  $R$  tel que pour tout  $a \in A$ ,  $|a| \leq R$ , c'est-à-dire  $-R \leq a \leq R$ , on voit que  $R$  est un majorant de  $\mathcal{A}$  et que  $-R$  est un minorant de  $\mathcal{A}$ .

### Pour aller plus loin 1 : coupures de Dedekind

Indiquons brièvement comment Richard Dedekind construit  $\mathbb{R}$ . L'idée est qu'un réel doit couper l'ensemble  $\mathbb{Q}$  en deux morceaux : ceux qui sont plus petits et ceux qui sont plus grands. Une coupure est par définition un couple  $(A_1, A_2)$  de parties non vides de  $\mathbb{Q}$  telles que :

- $A_1 \cup A_2 = \mathbb{Q}$ ,
- $\forall a_1 \in A_1, \forall a_2 \in A_2, \quad a_1 < a_2$ ,
- $A_1$  n'a pas de plus grand élément.

L'ensemble  $\mathbb{R}$  est *défini* comme l'ensemble de toutes les coupures. Au premier coup d'oeil, on ne reconnaît pas tout à fait notre bonne vieille droite réelle, mais au deuxième...

Par exemple, pour comprendre où sont les rationnels dans ce truc, il suffit de suivre cette idée de couper  $\mathbb{Q}$  en deux : tout élément  $r$  de  $\mathbb{Q}$  donne une coupure  $(A_1, A_2)$  en posant  $A_1 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < r\}$  et  $A_2 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq r\}$ . Cela permet de voir l'inclusion  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

L'ordre est simple à décrire : si  $x = (A_1, A_2)$  et  $y = (B_1, B_2)$ , on décide que  $x \leq y$  si  $A_1 \subset B_1$ . De ce point de vue, on peut facilement expliciter la borne supérieure d'une partie majorée  $\mathcal{A}$  de  $\mathbb{R}$  (qu'on définira au chapitre 2) : c'est  $(S, \mathbb{Q} \setminus S)$ , où  $S$  est l'union de tous les  $A_1$  tels que  $(A_1, A_2) \in \mathcal{A}$ .

Reste à voir que ça marche bien, qu'on peut prolonger les opérations algébriques de  $\mathbb{Q}$ ...

### 3. Nombres complexes

A partir de l'ensemble des réels  $\mathbb{R}$ , on construit l'ensemble  $\mathbb{C}$  en introduisant un nouvel élément  $i$ , racine du polynôme  $X^2 + 1$  :  $i^2 = -1$ . Tout



nombre complexe  $z \in \mathbb{C}$  s'écrit de manière unique  $z = a + ib$  où  $a$  et  $b$  sont des réels. Le réel  $a$  est la partie réelle de  $z$ , noté  $\operatorname{Re}(z)$ . Le réel  $b$  est la partie imaginaire de  $z$ , notée  $\operatorname{Im}(z)$ . Une opération utile est la conjugaison : le conjugué de  $z$  est par définition  $\bar{z} = a - ib$ . Par exemple, les parties réelle et imaginaire de  $z$  sont données par  $\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$  et  $\operatorname{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ .

L'ensemble  $\mathbb{C}$  n'est au fond que  $\mathbb{R}^2$ , puisqu'on peut identifier  $z = a + ib$  au couple de réels  $(a, b)$ . Le point important est qu'on peut additionner et multiplier les nombres complexes entre eux par les formules

$$\begin{aligned}(a + ib) + (c + id) &= (a + c) + i(b + d), \\ (a + ib) \cdot (c + id) &= (ac - bd) + i(ad + bc).\end{aligned}$$

Ces opérations sont compatibles avec la conjugaison au sens où, pour tous  $z, w \in \mathbb{C}$  :  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$  et  $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ .

On définit le module d'un complexe  $z$  comme suit : si  $a = \operatorname{Re}(z)$  et  $b = \operatorname{Im}(z)$ ,  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Autrement dit, c'est la longueur euclidienne du vecteur du plan de coordonnées  $(a, b)$ . Le module permet donc de mesurer la taille d'un nombre complexe, comme la valeur absolue mesure la taille des nombres réels.

L'inégalité  $a^2 \leq a^2 + b^2$  (pour  $a, b \in \mathbb{R}$ ) implique  $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$  pour tout nombre complexe  $z$ . De même,  $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$ .

L'égalité  $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$  établit un lien entre produit complexe, conjugaison et module :  $z\bar{z} = |z|^2$ . En particulier, on voit que tout nombre complexe  $z \neq 0$  admet un inverse donné par  $1/z = \bar{z}/|z|^2$ .

Les nombres réels sont les nombres complexes de partie imaginaire nulle. A ce titre, on peut calculer le module d'un nombre réel et ce n'est autre que sa valeur absolue (donc il n'y a pas de conflit de notation !). La proposition suivante étend les propriétés de la valeur absolue au module.

### Énoncé indispensable 5 : propriétés du module

Pour tous  $z, w \in \mathbb{C}$  :

- (1)  $|zw| = |z| \times |w|$  ;
- (2)  $|z + w| \leq |z| + |w|$  (« inégalité triangulaire ») ;
- (3)  $|z + w| \geq ||z| - |w||$  (« inégalité triangulaire à l'envers »).

*Démonstration.*

- (1) La première propriété se voit bien en utilisant la conjugaison :

$$|zw|^2 = zw\overline{zw} = zw\bar{z}\bar{w} = |z|^2 \times |w|^2.$$

Il suffit alors de prendre la racine carrée pour trouver l'égalité voulue.

- (2) On développe  $|z + w|^2 = (z + w)(\overline{z + w})$  :

$$|z + w|^2 = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = |z|^2 + |w|^2 + z\bar{w} + \bar{z}w.$$

Or  $\bar{z}w = \overline{z\bar{w}}$ , donc  $z\bar{w} + \bar{z}w = 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq 2|z\bar{w}| = 2|z||\bar{w}| = 2|z||w|$ .

On en tire

$$|z + w|^2 \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z| + |w|)^2$$

et on prend la racine carrée pour conclure.

(3) Par inégalité triangulaire, on obtient

$$|z| = |z + w - w| \leq |z + w| + |-w| = |z + w| + |w|,$$

d'où  $|z| - |w| \leq |z + w|$ . En échangeant les rôles de  $z$  et  $w$ , on trouve aussi  $|w| - |z| \leq |z + w|$ . On en déduit

$$||z| - |w|| = \max(|z| - |w|, |w| - |z|) \leq |z + w|.$$

◇

REMARQUE 3. Il est intéressant de chercher dans quel cas l'inégalité triangulaire est une égalité. Or la preuve présentée ci-dessus n'utilise que des égalités, à part une seule inégalité :  $\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq |z\bar{w}|$ . Si celle-ci est stricte, l'inégalité triangulaire est stricte. Sinon, c'est une égalité. La condition d'égalité est donc  $\operatorname{Re}(z\bar{w}) = |z\bar{w}|$ , ce qui signifie que  $z\bar{w}$  est un réel positif. Si  $w$  (ou  $z$ ) est nul, c'est vrai. Sinon on divise par  $|w|^2$  et on voit que ce critère est  $z/w \in \mathbb{R}_+$ . Géométriquement, cela veut dire que les vecteurs du plan représentés par  $z$  et  $w$  sont colinéaires de même sens.

REMARQUE 4. Dans  $\mathbb{C}$ , il n'existe pas de relation d'ordre total qui soit compatible avec les opérations algébriques (comme le sont les inégalités dans  $\mathbb{R}$ ). On n'écrit donc pas d'inégalités entre nombres complexes !

Et si on a vraiment trop envie, on travaille avec les parties réelle et imaginaire, ou avec le module.

## Analyse

### 1. Suites

Une suite de nombres complexes est la donnée de nombres complexes  $u_n$  indexés par un entier naturel  $n$ . Autrement dit, c'est une application  $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ , qui à chaque indice  $n$  associe le nombre complexe  $u_n = u(n)$ . On note généralement une telle suite sous la forme  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , ou parfois  $(u_n)$  pour faire plus court.

Le nombre  $u_n$  est appelé le  $n$ -ième terme de la suite  $(u_n)$ . Il arrive qu'il ne soit défini qu'à partir d'un certain rang  $n_0 > 0$  : on parlera alors de la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$ . Comme on s'intéressera aux propriétés de  $u_n$  pour les indices  $n$  très grands, cela n'a pas beaucoup d'importance.

Pour définir une suite, on peut donner une formule. Par exemple, on peut poser  $u_n = n + i \sin(n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ou bien  $u_n = 1/n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . On peut aussi donner un procédé de construction par récurrence, comme dans les exemples suivants.

Typiquement, une suite géométrique est déterminée par sa valeur initiale  $u_0$  et par sa raison  $\lambda$  via la relation de récurrence  $u_{n+1} = \lambda u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi,  $u_1 = \lambda u_0$ ,  $u_2 = \lambda u_1 = \lambda^2 u_0$ ... et on obtient même une formule :  $u_n = \lambda^n u_0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Un autre exemple est donné par la suite de Fibonacci : on pose  $u_0 = u_1 = 1$  et  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi, chaque terme de la suite est la somme des deux précédents : puisqu'on se donne les deux premiers, on peut tous les calculer. On verra plus tard dans ce cours comment donner une formule générale dans ce type de situation.

Les suites de Syracuse sont aussi définies par récurrence. On se donne une valeur initiale entière et strictement positive :  $u_0 \in \mathbb{N}^*$ . Ensuite, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on demande que  $u_{n+1} = u_n/2$  si  $u_n$  est pair et  $u_{n+1} = 3u_n + 1$  si  $u_n$  est impair. Par exemple, si on part de  $u_0 = 3$ , les termes successifs de la suite sont : 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, etc. Si on s'amuse à prendre d'autres valeurs de  $u_0$ , on retrouvera un comportement similaire : au bout d'un moment, la suite arrive à 1 et donc se met à boucler : 4, 2, 1, 4, 2, 1, etc. Enfin... c'est ce qu'on croit. Personne n'a jamais réussi à prouver que les suites de Syracuse finissent toujours par retomber sur 1... Défi ?

**1.1. Convergence des suites complexes.** Quand on étudie une suite, la question centrale est celle de son comportement asymptotique : comment décrire les valeurs prises par  $u_n$  quand  $n$  est très grand ? On va donner une définition précise décrivant les suites qui se rapprochent asymptotiquement d'une valeur donnée  $\ell \in \mathbb{C}$ .

Dans la suite, on notera  $D(a, r)$  le disque de rayon  $r$  centré en un point  $a$  du plan complexe :  $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ .

### Énoncé indispensable 1 : convergence d'une suite

Une suite  $(u_n)$  est dite convergente s'il existe  $\ell \in \mathbb{C}$  tel que, pour tout rayon  $\varepsilon > 0$ , il existe un rang  $N \in \mathbb{N}$  à partir duquel la suite reste dans le disque  $D(\ell, \varepsilon)$ . Autrement dit :

$$\exists \ell \in \mathbb{C}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Le nombre complexe  $\ell$  apparaissant dans cet énoncé est unique (s'il existe), comme on va le démontrer ci-dessous. On dit que  $(u_n)$  converge (ou tend) vers  $\ell$ , que  $\ell$  est la limite de la suite  $(u_n)$  et on note :

$$\ell = \lim(u_n), \quad \ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n, \quad (u_n) \rightarrow \ell.$$

EXEMPLE 6. La suite  $(1/n)$  converge vers 0. En effet, si on se donne  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver un entier  $N > 1/\varepsilon$  et alors pour  $n \geq N$  :

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

PROPOSITION 2. La limite d'une suite, quand elle existe, est unique.

*Démonstration.* On raisonne par l'absurde en supposant que la suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  et  $\ell'$ , avec  $\ell \neq \ell'$ . Ainsi, le nombre  $\varepsilon = |\ell - \ell'|/4$  est strictement positif. La définition de la convergence donne des rangs  $N$  et  $N'$  tels que

$$\forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \forall n \geq N', |u_n - \ell'| < \varepsilon.$$

Pour  $n \geq \max(N, N')$ , on peut utiliser l'inégalité triangulaire pour trouver

$$|\ell - \ell'| = |(\ell - u_n) - (\ell' - u_n)| \leq |\ell - u_n| + |\ell' - u_n| < 2\varepsilon.$$

Or  $|\ell - \ell'| = 4\varepsilon$ . C'est donc contradictoire : il n'est pas possible que  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  et  $\ell'$ , avec  $\ell \neq \ell'$ .  $\diamond$

REMARQUE 5. Dans la définition de la convergence d'une suite, on peut remplacer  $\varepsilon$  par  $17\varepsilon$  ou  $\varepsilon/2$  : ça ne change rien, il suffit de baptiser  $\varepsilon' = 17\varepsilon$  ou  $\varepsilon/2$  et on aura l'énoncé initial pour tout  $\varepsilon' > 0$ . Dans le même ordre d'idée, on peut aussi écrire  $\leq \varepsilon$  au lieu de  $< \varepsilon$  dans la définition et cela ne change rien.

Ne pas converger, c'est diverger.

DEFINITION 8. Une suite  $(u_n)$  est dite divergente si elle ne converge pas :

$$\forall \ell \in \mathbb{C}, \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, \quad |u_n - \ell| \geq \varepsilon.$$

EXEMPLE 7. Vérifions que la suite  $(i^n)$  est divergente. On se donne  $\ell \in \mathbb{C}$ , quelconque, et on suppose par l'absurde que  $(i^n)$  converge vers  $\ell$ . Fixons  $\varepsilon = 1$  dans la définition de la convergence : cela nous donne un entier  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour  $n \geq N$ ,  $|i^n - \ell| < 1$ . Pour  $n = 4N$  et  $n = 4N + 2$ , cela donne respectivement  $|1 - \ell| < 1$  et  $|-1 - \ell| < 1$ . Par inégalité triangulaire,

$$2 = |(1 - \ell) - (-1 - \ell)| \leq |1 - \ell| + |-1 - \ell| < 2,$$

absurde. Donc la suite  $(i^n)$  ne converge pas : elle diverge.

Qui peut le plus peut le moins.

DEFINITION 9. Une suite  $(u_n)$  est dite bornée si le module de ses termes est majoré :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M.$$

Géométriquement, cela signifie que les termes de la suite sont tous situés dans un certain disque (centré en l'origine 0 du plan complexe  $\mathbb{C}$ ).

REMARQUE 6. Une suite  $(u_n)$  est bornée si et seulement si les suites  $(\operatorname{Re}(u_n))$  et  $(\operatorname{Im}(u_n))$  le sont, c'est-à-dire si ces deux suites à valeurs réelles sont majorées et minorées. Le sens  $\Rightarrow$  vient des inégalités  $|\operatorname{Re}(u_n)| \leq |u_n|$  et  $|\operatorname{Im}(u_n)| \leq |u_n|$ . Le sens  $\Leftarrow$  découle de la formule  $|u_n| = \sqrt{\operatorname{Re}(u_n)^2 + \operatorname{Im}(u_n)^2}$ .

PROPOSITION 3. Une suite convergente est bornée.

*Démonstration.* Supposons que la suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell \in \mathbb{C}$ . En prenant  $\varepsilon = 1$  dans la définition de la convergence, on trouve un rang  $N$  tel que pour  $n \geq N$ ,  $|u_n - \ell| \leq 1$  et donc  $|u_n| = |u_n - \ell + \ell| \leq |u_n - \ell| + |\ell| \leq 1 + |\ell|$ . Cette borne convient pour les termes à partir du rang  $N$ . Afin d'englober les premiers termes, on pose  $M = \max(|u_0|, \dots, |u_{N-1}|, 1 + |\ell|)$  et on observe que  $|u_n| \leq M$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .  $\diamond$

Par contraposée, on déduit de cette proposition qu'une suite non bornée est divergente. Par exemple, les termes de la suite  $(ne^{i \arctan n})$  sont de module  $n$ , donc prennent des valeurs arbitrairement grandes : cette suite n'est pas bornée, donc divergente.

REMARQUE 7. L'inégalité triangulaire  $||u_n| - |\ell|| \leq |u_n - \ell|$  montre immédiatement que si  $(u_n)$  converge  $\ell$ , alors  $(|u_n|)$  converge vers  $|\ell|$ .

Quand on se donne deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ , on peut en produire deux autres en sommant et en multipliant leurs termes :  $(u_n + v_n)$  et  $(u_n \times v_n)$ . Ces opérations sont compatibles avec la notion de convergence : la proposition suivante dit qu'une somme (resp. un produit) de suites convergentes converge vers la somme (resp. le produit) des limites.

PROPOSITION 4. Si  $(u_n) \rightarrow \ell$  et  $(v_n) \rightarrow k$ , alors  $(u_n + v_n) \rightarrow \ell + k$  et  $(u_n v_n) \rightarrow \ell k$ .

*Démonstration.* Somme. Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe des rangs  $N_1$  et  $N_2$  tels que  $|u_n - \ell| < \varepsilon/2$  pour  $n \geq N_1$  et  $|v_n - k| < \varepsilon/2$  pour  $n \geq N_2$ . On se place au-delà du rang  $N = \max(N_1, N_2)$  : pour  $n \geq N$ ,

$$|(u_n + v_n) - (\ell + k)| = |u_n - \ell + v_n - k| \leq |u_n - \ell| + |v_n - k| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Cela prouve que la suite  $(u_n + v_n)$  converge vers  $\ell + k$ .

Produit. Commençons par écrire, pour  $n \in \mathbb{N}$  :

$$|u_n v_n - \ell k| = |(u_n - \ell)v_n + \ell(v_n - k)| \leq |u_n - \ell||v_n| + |\ell||v_n - k|.$$

$(v_n)$  est convergente donc bornée : on peut trouver  $R > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|v_n| \leq R$ . Etant donné  $\varepsilon > 0$ , on peut (comme ci-dessus) trouver

un rang  $N$  tel que pour  $n \geq N$ ,  $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{R+|\ell|}$  et  $|v_n - k| < \frac{\varepsilon}{R+|\ell|}$ . En combinant ces inégalités, on trouve, pour  $n \geq N$  :

$$|u_n v_n - \ell k| < \frac{\varepsilon}{R+|\ell|} R + |\ell| \frac{\varepsilon}{R+|\ell|} = \varepsilon.$$

Cela prouve que la suite  $(u_n v_n)$  converge vers  $\ell k$ .  $\diamond$

**Test : convergence de l'inverse**

Soit  $(u_n)$  une suite convergeant vers  $\ell \neq 0$ . Prouver que la suite  $(1/u_n)$  converge vers  $1/\ell$ .

**COROLLAIRE 1.** Une suite complexe  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  si et seulement si  $(\operatorname{Re}(u_n))$  tend vers  $\operatorname{Re}(\ell)$  et  $(\operatorname{Im}(u_n))$  tend vers  $\operatorname{Im}(\ell)$ .

*Démonstration.* Le sens  $\Leftarrow$  découle de l'écriture  $u_n = \operatorname{Re}(u_n) + i\operatorname{Im}(u_n)$  et de la proposition précédente. Pour le sens  $\Rightarrow$ , on écrit l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\operatorname{Re}(u_n) - \operatorname{Re}(\ell)| = |\operatorname{Re}(u_n - \ell)| \leq |u_n - \ell|$$

Si  $(u_n) \rightarrow \ell$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a un rang  $N$  à partir duquel le membre de droite est  $< \varepsilon$ , de sorte que le membre de gauche l'est aussi :  $(\operatorname{Re}(u_n))$  converge vers  $\operatorname{Re}(\ell)$ . De même pour la partie imaginaire.  $\diamond$

En particulier, si les termes d'une suite convergente  $(u_n)$  sont tous dans  $\mathbb{R}$ , la suite  $(\operatorname{Im}(u_n))$  est identiquement nulle et donc tend vers 0. Ainsi, la limite de  $(u_n)$  est de partie imaginaire nulle : c'est un nombre réel.

Pour étudier le comportement asymptotique des suites, les notions suivantes sont utiles.

**DEFINITION 10.** Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites complexes telle que  $v_n$  ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On note

- $u_n = o(v_n)$  si  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  tend vers 0 ;
- $u_n \sim v_n$  si  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  tend vers 1 ;
- $u_n = O(v_n)$  si  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  est bornée.

Ces trois propriétés se lisent respectivement «  $(u_n)$  est un petit o de  $(v_n)$  », «  $(u_n)$  est équivalente à  $(v_n)$  » et «  $(u_n)$  est un grand o de  $(v_n)$  ».

Par exemple, en prenant  $(v_n)$  constante à 1, on voit que  $u_n = o(1)$  ssi  $(u_n)$  tend vers 0,  $u_n \sim 1$  ssi  $(u_n)$  tend vers 1 et  $u_n = O(1)$  ssi  $(u_n)$  est bornée.

Ces trois notions sont liées entre elles. On voit bien que les relations  $u_n = o(v_n)$  ou  $u_n \sim v_n$  impliquent  $u_n = O(v_n)$ . On vérifie aussi que  $u_n \sim v_n$  si et seulement si  $u_n - v_n = o(v_n)$ , ce qu'on note aussi  $u_n = v_n + o(v_n)$ .

Les développements limités usuels, vus au premier semestre, sont utiles pour apprécier le comportement asymptotique des suites. Par exemple, le développement limité  $\ln(1+x) = x + o(x)$ , quand  $x \rightarrow 0$ , assure la relation  $\ln(1+1/n) = 1/n + o(1/n)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Cela revient à  $\ln(1+1/n) \sim 1/n$ .

Pour calculer des limites, il peut être utile d'avoir les comparaisons suivantes en tête.

- $\ln n = o(n^a)$  pour tout  $a > 0$ .
- $n^b = o(r^n)$  pour tout  $b \in \mathbb{R}$  et  $r > 1$ .
- $z^n = o(n!)$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$ .
- $n! = o(n^n)$ .

Elles seront démontrées en TD.

**1.2. Bornes supérieure et inférieure.** Dans le prochain paragraphe, nous allons nous concentrer sur les suites réelles afin d'obtenir des critères de convergence puissants. Cela passe par un approfondissement des propriétés des nombres réels. Si  $\mathcal{A}$  une partie de  $\mathbb{R}$ , on dit que

- le nombre réel  $M$  est un *majorant* de  $\mathcal{A}$  si, pour tout  $a \in \mathcal{A}$ ,  $a \leq M$  ;
- le nombre réel  $m$  est un *minorant* de  $\mathcal{A}$  si, pour tout  $a \in \mathcal{A}$ ,  $a \geq m$  ;
- la partie  $\mathcal{A}$  est *majorée* (resp. *minorée*) si elle admet un majorant (resp. minorant).

Bien sûr, une partie majorée n'admet pas qu'un majorant : si  $M$  est un majorant,  $M + 1$  aussi... Il peut être intéressant d'avoir un majorant optimal, le plus petit possible. L'ensemble ordonné  $\mathbb{R}$  possède une propriété remarquable : toute partie non vide et majorée possède un plus petit majorant, qu'on appelle sa *borne supérieure*.

### Énoncé indispensable 2 : borne supérieure

Toute partie non vide et majorée  $\mathcal{A}$  de  $\mathbb{R}$  admet une borne supérieure  $\sup \mathcal{A}$  : c'est le plus petit des majorants, c'est-à-dire l'unique nombre réel vérifiant les deux propriétés suivantes.

- $\forall a \in \mathcal{A}, \quad a \leq \sup \mathcal{A}$  ;
- $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists a \in \mathcal{A}, \quad a > \sup \mathcal{A} - \varepsilon$ .

La première propriété exprime le fait que  $\sup \mathcal{A}$  est un majorant. La seconde dit que c'est le plus petit des majorants, puisque tout nombre plus petit ( $\sup \mathcal{A} - \varepsilon$ ) n'est pas un majorant.

Nous ne démontrerons pas ce théorème : il est intimement lié à la construction de  $\mathbb{R}$  (dans la construction par coupures de Dedekind, c'est presque par définition vrai).

L'énoncé analogue sur les minorants est bien sûr vrai : toute partie non vide et minorée de  $\mathbb{R}$  possède un plus grand minorant, qu'on appelle sa *borne inférieure*.

### Énoncé indispensable 3 : borne inférieure

Toute partie non vide et minorée  $\mathcal{A}$  de  $\mathbb{R}$  admet une borne inférieure  $\inf \mathcal{A}$  : c'est le plus grand des minorants, c'est-à-dire l'unique nombre réel vérifiant les deux propriétés suivantes.

- $\forall a \in \mathcal{A}, \quad a \geq \inf \mathcal{A}$  ;
- $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists a \in \mathcal{A}, \quad a < \inf \mathcal{A} + \varepsilon$ .

Par convention, on étend parfois les bornes supérieures et inférieures à toutes les parties  $\mathcal{A}$  de  $\mathbb{R}$  en autorisant des valeurs infinies :

- si  $\mathcal{A}$  n'est pas majorée,  $\sup \mathcal{A} = +\infty$  ;
- si  $\mathcal{A}$  n'est pas minorée,  $\inf \mathcal{A} = -\infty$ .

Si  $\mathcal{A}$  est vide, on peut même poser  $\sup \mathcal{A} = -\infty$  et  $\inf \mathcal{A} = +\infty$ .

REMARQUE 8. On dit qu'un réel  $a_0$  est *le plus grand élément* (ou *maximum*) d'une partie  $\mathcal{A}$  de  $\mathbb{R}$  si :

$$a_0 \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \forall a \in \mathcal{A}, \quad a \leq a_0.$$

Un tel  $a_0$ , s'il existe, est la borne supérieure de  $\mathcal{A}$  :  $\sup \mathcal{A} = a_0$  (en effet, c'est un majorant et, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut choisir  $a = a_0$  dans la seconde propriété). Mais attention ce n'est pas du tout le cas général ! La borne supérieure n'est pas forcément un élément de  $\mathcal{A}$ , comme on le voit dans l'exemple suivant.

EXEMPLE 8. Soient deux réels  $a < b$ . On considère l'intervalle ouvert

$$I = ]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

Il admet comme borne supérieure  $b$ . En effet,  $b$  est un majorant de  $I$  puisque tout  $x$  de  $I$  vérifie  $x < b$ . Et pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver  $x \in ]a, b[$  tel que  $x > b - \varepsilon$  (prendre  $x = b - \varepsilon/2$  si  $\varepsilon < b - a$ , et n'importe quel élément de l'intervalle sinon). Cela prouve que  $\sup I = b$ . On montre de même que la borne inférieure de  $I$  est  $a$ .

On peut remarquer que les intervalles  $[a, b[$ ,  $]a, b]$  et  $[a, b]$  ont aussi comme borne supérieure  $b$  et comme borne inférieure  $a$ , avec le même argument.

Avant de donner un autre exemple, revenons sur la « propriété d'Archimède » : pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , il existe un entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n > x$ . On peut la voir comme une conséquence de l'existence de la borne supérieure : par l'absurde, si tous les entiers naturels  $n \in \mathbb{N}$  vérifient  $n \leq x$ , l'ensemble  $\mathbb{N}$  est une partie non vide et majorée (par  $x$ ) de  $\mathbb{R}$ , donc admet une borne supérieure  $\sigma \in \mathbb{R}$  ; or pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n+1 \in \mathbb{N}$ , donc  $n+1 \leq \sigma$ , i.e.  $n \leq \sigma - 1$ , ce qui prouve que  $\sigma - 1$  est un majorant de  $\mathbb{N}$  ; c'est une contradiction puisque  $\sigma - 1 < \sigma = \sup \mathbb{N}$ .

EXEMPLE 9. Soit  $\mathcal{A} = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ . On voit que 0 est un minorant de  $\mathcal{A}$ . Et pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver un entier  $n$  tel que  $n > 1/\varepsilon$ , de sorte que  $1/n < \varepsilon$ . Donc  $\inf \mathcal{A} = 0$ . Par ailleurs, 1 est le plus grand élément de  $\mathcal{A}$ , donc  $1 = \sup \mathcal{A}$ .

REMARQUE 9. Faisons une remarque pratique sur la manipulation des inégalités avec des bornes supérieures. Si  $\mathcal{A}$  est une partie de  $\mathbb{R}$  et  $M$  un nombre réel, on dispose de l'équivalence suivante :

$$\sup \mathcal{A} \leq M \quad \Leftrightarrow \quad \forall a \in \mathcal{A}, \quad a \leq M.$$

$\Rightarrow$  est clair parce que le sup est un majorant (et donc tout nombre plus grand aussi). Pour  $\Leftarrow$ , on suppose en fait que  $M$  est un majorant de  $\mathcal{A}$ , et donc, puisque la borne supérieure est le plus petit des majorants,  $\sup \mathcal{A} \leq M$ .

On appelle cela « passer à la borne supérieure » : si tous les éléments d'une partie de  $\mathbb{R}$  vérifient une majoration, la borne supérieure la vérifie aussi. De même, si les éléments  $a$  de  $\mathcal{A}$  vérifient une minoration  $a \geq m$ , on peut la passer à la borne inférieure :  $\inf \mathcal{A} \geq m$ .



**Test : inclusion et bornes**

Prouver que si  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ , alors  $\sup \mathcal{A} \leq \sup \mathcal{B}$  et  $\inf \mathcal{A} \geq \inf \mathcal{B}$ .

L'existence de bornes supérieures et inférieures est cruciale en analyse. C'est elle qui permet de démontrer rigoureusement certains résultats fondamentaux comme le théorème des valeurs intermédiaires ou l'existence d'une limite réelle pour les suites croissantes majorées. Essentiellement, dans ces énoncés, on a besoin de construire un réel et on le définira comme la borne supérieure ou inférieure d'un ensemble de réels bien choisis.

REMARQUE 10. Cela impose de travailler spécifiquement avec des nombres réels. Il n'y a pas d'équivalent dans  $\mathbb{Q}$  : une partie majorée de  $\mathbb{Q}$  n'admet pas de borne supérieure rationnelle en général. Par exemple, l'irrationalité de  $\sqrt{2}$  (cf. TD) fait que  $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{2}\}$  n'a pas de borne supérieure dans  $\mathbb{Q}$ .

**1.3. Résultats spécifiques aux suites réelles.** Dans ce paragraphe, on se focalise sur les suites  $(u_n)$  à valeurs réelles : pour tout indice  $n$ ,  $u_n$  est supposé être un nombre réel. L'intérêt, c'est qu'on dispose dans  $\mathbb{R}$  d'inégalités, ce qui donne lieu à des résultats particuliers.

Précisons d'abord la condition de convergence d'une suite réelle  $(u_n)$  vers un nombre  $\ell$  (réel, comme on l'a vu). Elle signifie que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un rang  $N$  tel que pour  $n \geq N$ ,  $u_n \in D(\ell, \varepsilon)$ , i.e.  $|u_n - \ell| < \varepsilon$ . Comme ici  $u_n$  et  $\ell$  sont des réels, le module n'est qu'une valeur absolue et donc en fait  $|u_n - \ell| < \varepsilon$  veut dire  $-\varepsilon < u_n - \ell < \varepsilon$  ou encore  $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$ . Ou encore  $u_n \in ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ .

THÉORÈME 1. *Les inégalités larges passent à la limite : si on considère des suites réelles telles que  $(u_n) \rightarrow \ell$ ,  $(v_n) \rightarrow k$  et  $u_n \leq v_n$  pour tout indice  $n$ , alors  $\ell \leq k$ .*

Dans cet énoncé, on ne peut pas remplacer les inégalités larges  $\leq$  par des inégalités strictes  $<$ . Par exemple, si  $u_n = 0$  et  $v_n = 1/n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $u_n < v_n$  pour tout  $n$ ,  $(u_n) \rightarrow 0$ ,  $(v_n) \rightarrow 0$  et certainement pas  $0 < 0$ .

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ . La convergence des suites dit que pour un indice  $n$  assez grand, on aura  $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$  et  $k - \varepsilon < v_n < k + \varepsilon$ . Avec l'inégalité  $u_n \leq v_n$ , on en tire  $\ell - \varepsilon < k + \varepsilon$ . Donc  $\ell < k + 2\varepsilon$ , et ce pour tout  $\varepsilon > 0$ . Cela implique  $\ell \leq k$ . En effet, si au contraire  $\ell > k$ , on peut trouver  $\varepsilon > 0$  tel que  $\ell - 2\varepsilon > k$  (par exemple,  $\varepsilon = (\ell - k)/4$  convient), contradiction.  $\diamond$

Un célèbre critère de convergence découle des mêmes idées.

THÉORÈME 2 (Théorème des gendarmes). *Soient  $(u_n)$ ,  $(v_n)$ ,  $(w_n)$  trois suites réelles telles que  $u_n \leq v_n \leq w_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que  $(u_n)$  et  $(w_n)$  convergent vers une même limite  $\ell$ . Alors  $(v_n)$  converge aussi vers  $\ell$ .*

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $(u_n) \rightarrow \ell$  et  $(w_n) \rightarrow \ell$ , on peut trouver un rang  $N$  tel que pour  $n \geq N$ ,  $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$  et  $\ell - \varepsilon < w_n < \ell + \varepsilon$  et

donc  $\ell - \varepsilon < u_n \leq v_n \leq w_n < \ell + \varepsilon$ , d'où  $|v_n - \ell| < \varepsilon$ . Cela prouve que  $(v_n)$  converge vers  $\ell$ .  $\diamond$

EXEMPLE 10. Etant donné un réel  $x$ , définissons  $u_n = E(nx)/n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Rappelons que  $E(a)$  désigne la partie entière du réel  $a$ , l'entier caractérisé par l'encadrement  $E(a) \leq a < E(a) + 1$ . En faisant  $a = nx$ , on en déduit pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $u_n \leq x < u_n + 1/n$ , i.e.  $x - 1/n < u_n \leq x$ . Donc la suite de rationnels  $(u_n)$  converge vers le réel  $x$ .

Explicitons une caractérisation des bornes supérieure et inférieure avec des suites. Elle sert tout le temps, que ce soit pour calculer un sup en pratique ou pour produire des suites intéressantes.

PROPOSITION 5. Soit  $\mathcal{A}$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ .

- (1) On suppose que  $S$  est un majorant de  $\mathcal{A}$  et qu'il existe une suite  $(a_n)$  d'éléments de  $\mathcal{A}$  telle que  $(a_n)$  converge vers  $S$ . Alors  $S = \sup \mathcal{A}$ .
- (2) Réciproquement, si  $\mathcal{A}$  est majorée, il existe une suite  $(a_n)$  d'éléments de  $\mathcal{A}$  telle que  $(a_n)$  converge vers  $\sup \mathcal{A}$ .

L'énoncé analogue pour les bornes inférieures est bien sûr aussi vrai.

Démonstration. (a)  $S$  est un majorant par hypothèse. Soit  $\varepsilon > 0$ . Pour  $n$  assez grand,  $S - \varepsilon < a_n < S + \varepsilon$ . Comme  $a_n \in \mathcal{A}$ , cela indique que  $S - \varepsilon$  n'est pas un majorant. Donc  $S = \sup \mathcal{A}$ . (b) Posons  $S = \sup \mathcal{A}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la définition de la borne supérieure donne un élément  $a_n$  de  $\mathcal{A}$  tel que  $a_n > S - \frac{1}{n}$  (puisque  $S - 1/n$  n'est pas un majorant). Comme  $S$  est aussi un majorant de  $\mathcal{A}$ , on en déduit :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S - \frac{1}{n} \leq a_n \leq S$ . Donc  $(a_n)$  est une suite d'éléments de  $\mathcal{A}$  qui converge vers sa borne supérieure  $S$ .  $\diamond$

Une suite réelle  $(u_n)$  peut être croissante (si  $p \leq q$ ,  $u_p \leq u_q$ ) ou décroissante (si  $p \leq q$ ,  $u_p \geq u_q$ ), ce qui n'aurait juste pas de sens dans  $\mathbb{C}$ .

THÉORÈME 3. Toute suite réelle croissante et majorée (resp. décroissante et minorée) est convergente.

Une suite réelle  $(u_n)$  est majorée s'il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq M$ . Cela revient à dire que l'ensemble des valeurs prises par la suite  $(u_n)$  admet une borne supérieure finie :  $\sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$  est un nombre réel bien défini. De même, une suite réelle  $(u_n)$  est minorée s'il existe  $m \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq m$ . Cela revient à dire :  $\inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\} > -\infty$ .

On va voir dans la preuve ci-dessous que la limite d'une suite croissante (resp. décroissante) est précisément la borne supérieure (resp. inférieure) de ses valeurs.

Démonstration. Soit  $(u_n)$  une suite croissante majorée. On considère sa borne supérieure  $\ell = \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$ . Ainsi, on a l'inégalité  $u_n \leq \ell$  pour tout indice  $n$ . De plus, par définition de la borne supérieure, si on se donne  $\varepsilon > 0$ , il existe un élément  $u_N$  de l'ensemble  $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$  tel que  $u_N \geq \ell - \varepsilon$ . Par croissance de  $(u_n)$ , on en déduit que pour tout  $n \geq N$ ,  $u_n \geq u_N \geq \ell - \varepsilon$ . Pour  $n \geq N$ , on peut donc écrire  $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell \leq \ell + \varepsilon$ , ce qui implique  $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ . Cela prouve que  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ .

Si  $(u_n)$  est décroissante minorée,  $(-u_n)$  est croissante majorée, donc converge vers une limite  $\ell$ . Alors  $(u_n)$  converge vers  $-\ell$ .  $\diamond$

On peut renforcer cet énoncé en introduisant la notion de limite  $\pm\infty$ , pour les suites réelles. On dit qu'une suite réelle  $(u_n)$  tend vers  $+\infty$  si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad u_n \geq A;$$

on dit qu'elle tend vers  $-\infty$  si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad u_n \leq A.$$

Attention au vocabulaire : si une suite réelle tend vers  $\pm\infty$ , elle n'est pas bornée, donc elle est divergente. La notion de convergence requiert une limite finie.

EXEMPLE 11. Complétons la proposition 5. Si  $\mathcal{A}$  est une partie non majorée de  $\mathbb{R}$ , on peut trouver pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  un élément  $a_n$  de  $\mathcal{A}$  tel que  $a_n > n$  (sinon,  $n$  serait un majorant). La suite  $(a_n)$  tend alors vers  $+\infty$ .

On peut retenir que, pour toute partie non vide  $\mathcal{A}$  de  $\mathbb{R}$ , il existe une suite  $(a_n)$  d'éléments de  $\mathcal{A}$  qui tend vers  $\sup \mathcal{A}$ , que cette borne supérieure soit finie ou non. De même, il existe toujours une suite  $(b_n)$  de  $\mathcal{A}$  qui tend vers  $\inf \mathcal{A}$ .

Si on considère une suite  $(u_n)$  croissante mais non majorée, on peut trouver pour tout  $A \in \mathbb{R}$ , une valeur  $u_N$  telle que  $u_N \geq A$  (sinon,  $A$  serait un majorant de la suite); alors la croissance donne  $u_n \geq A$  pour tout  $n \geq N$ . Donc une suite croissante non majorée tend vers  $+\infty$ . Et on voit de la même façon qu'une suite décroissante non minorée tend vers  $-\infty$ .

PROPOSITION 6. *Toute suite réelle croissante et non majorée (resp. décroissante et non minorée) tend vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ).*

Donc une suite monotone (i.e. croissante ou décroissante) admet toujours une limite dans  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ .

REMARQUE 11. Soit  $(u_n)$  une suite de nombres positifs. Si on pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ , on obtient une suite croissante  $(S_n)$ , puisque, pour tout  $n$ ,  $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$ . Ainsi,  $(S_n)$  admet toujours une limite  $S$ , qui est soit un nombre réel positif, soit  $+\infty$ . On la note  $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ . Cela donne un sens à n'importe quelle somme infinie de nombres positifs. Par exemple, on peut montrer que  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2$  et  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ .

Mentionnons enfin un joli critère de convergence découlant des résultats précédents.

THÉORÈME 4 (Théorème des suites adjacentes). *Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  des suites réelles telles que  $(u_n)$  est croissante,  $(v_n)$  est décroissante et  $(v_n - u_n)$  tend vers 0. Alors  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers une même limite  $\ell$ .*

Comme le nom du théorème le suggère, deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  comme dans l'énoncé sont dites adjacentes.

*Démonstration.* Écrivons  $(u_n) = (u_n - v_n + v_n)$ . La suite  $(u_n - v_n)$  est convergente donc bornée, et en particulier majorée. La suite  $(v_n)$  est décroissante donc majorée (par son premier terme  $v_0$ ). En sommant, on voit donc que  $(u_n)$  est majorée. Comme  $(u_n)$  est croissante,  $(u_n)$  converge vers une limite  $\ell$ . On voit de même que  $(v_n)$  est décroissante minorée, donc convergente, vers une limite  $\ell'$ . Alors  $(u_n - v_n)$  tend vers  $\ell - \ell'$ . Or, par hypothèse,  $(u_n - v_n)$  tend vers 0. Par unicité de la limite,  $\ell - \ell' = 0$ , soit  $\ell = \ell'$ .  $\diamond$

On peut remarquer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  de l'énoncé vérifient automatiquement  $u_n \leq v_n$  pour tout  $n$ . En effet, les hypothèses du théorème assurent que  $(v_n - u_n)$  est une suite décroissante tendant vers 0. Donc  $0 = \inf\{v_n - u_n \mid n \in \mathbb{N}\} : v_n - u_n \geq 0$  pour tout  $n$ .

#### 1.4. Sous-suites.

DEFINITION 11. Soit  $(u_n)$  une suite. Une sous-suite de  $(u_n)$  est une suite  $(v_n)$  de la forme  $(v_n) = (u_{\varphi(n)})$ , où  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est une fonction strictement croissante.

On dit aussi que  $(v_n)$  est une suite extraite de  $(u_n)$  et que la fonction  $\varphi$  est une extractrice. L'idée est ne pas prendre en compte tous les termes de la suite  $(u_n)$ , mais d'en effacer certains et de ne garder que ceux qui sont indicés par  $\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \dots$ . En pratique, on va chercher à extraire une sous-suite qui a de meilleures propriétés : typiquement, on va s'arranger pour sélectionner des termes qui donnent une sous-suite convergente.

EXEMPLE 12. Partons de la suite divergente  $(u_n) = (i^n)$ , dont les termes successifs sont :  $1, i, -1, -i, 1, i, -1, -i, 1, i, -1, \dots$ . À l'aide de l'extractrice  $\varphi : n \mapsto 4n$ , on obtient la sous-suite  $(u_{4n}) = (i^{4n}) = (1)$ , qui est constante à 1 (donc convergente). Dans la liste des termes de  $(u_n)$ , on a ici sélectionné exactement les 1, en oubliant trois termes sur quatre.

REMARQUE 12. Une sous-suite d'une sous-suite est une sous-suite : si  $(w_n)$  est une sous-suite de  $(v_n)$ , qui elle-même est une sous-suite de  $(u_n)$ , alors  $(w_n)$  est une sous-suite de  $(u_n)$ . En effet, dans ce cadre, on a des extractrices  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  telles que  $(w_n) = (v_{\varphi_2(n)})$  et  $(v_m) = (u_{\varphi_1(m)})$ . En posant  $m = \varphi_2(n)$ , on obtient donc pour tout  $n$  :  $w_n = u_{\varphi_1(\varphi_2(n))} = u_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}$ . Et la fonction  $\varphi_1 \circ \varphi_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est strictement croissante comme composée de fonctions strictement croissantes : c'est bien une extractrice.

Quand on manipule des suites extraites, il est bon d'avoir la petite remarque suivante en tête.

LEMME 1. Toute extractrice  $\varphi$  vérifie :  $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$ .

*Démonstration.* On montre cette inégalité par récurrence sur l'entier naturel  $n$ . Initialisation ? Puisque  $\varphi$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$ ,  $\varphi(0)$  est dans  $\mathbb{N}$ , donc  $\varphi(0) \geq 0$ . Hérédité ? Supposons que  $\varphi(n) \geq n$  pour un certain entier naturel  $n$ . Puisque  $\varphi$  est strictement croissante, l'entier  $\varphi(n+1)$  est strictement plus grand que l'entier  $\varphi(n)$  :  $\varphi(n+1) \geq \varphi(n) + 1$ . Avec l'hypothèse de récurrence

$\varphi(n) \geq n$ , il vient donc  $\varphi(n+1) \geq n+1$ . Cela montre le résultat, par le principe de récurrence.  $\diamond$

On en déduit qu'une sous-suite d'une suite convergente est convergente, de même limite.

**PROPOSITION 7.** *Si  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ , toute sous-suite  $(u_{\varphi(n)})$  converge aussi vers  $\ell$ .*

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ . La convergence de  $(u_n)$  donne un rang  $N$  tel que pour tout  $k \geq N$ ,  $|u_k - \ell| < \varepsilon$ . Pour tout entier  $n \geq N$ , le lemme permet de voir que  $\varphi(n) \geq n \geq N$ , donc on peut poser  $k = \varphi(n)$  dans l'inégalité ci-dessus et on trouve  $|u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon$ .  $\diamond$

Le théorème suivant est fondamental en analyse. Il permet de bâtir des sous-suites convergentes de façon très générale, sans avoir à expliciter une extractrice particulière.

#### Énoncé indispensable 4 : théorème de Bolzano-Weierstrass

Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.

La preuve repose sur le principe des tiroirs : si deux tiroirs contiennent en tout trois chaussettes, l'un des tiroirs contient au moins deux chaussettes. De même, si deux tiroirs contiennent en tout une infinité de chaussettes, l'un des tiroirs (au moins) contient une infinité de chaussettes !

*Démonstration.*

**Étape 1.** Traitons dans un premier temps le cas d'une suite *réelle* bornée  $(u_n)$  : il existe un intervalle  $[-R, R]$  de  $\mathbb{R}$  qui contient tous les termes  $u_n$ .

Dans ce cadre, on va définir par récurrence deux suites adjacentes  $(a_n)$  et  $(b_n)$  telles que tous les intervalles  $[a_n, b_n]$  contiennent une infinité de termes de la suite  $(u_n)$ . On initialise les deux suites en posant  $a_0 = -R$  et  $b_0 = R$ , de sorte que  $[a_0, b_0]$  contient tous les termes. On suppose ensuite  $[a_n, b_n]$  construit convenablement pour un certain  $n$  et on note  $m_n$  le milieu de  $[a_n, b_n]$ . Puisque  $[a_n, b_n]$  contient une infinité de termes de la suite (par construction), l'un des intervalles  $[a_n, m_n]$  ou  $[m_n, b_n]$  contient une infinité de termes de la suite : on le baptise  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$  (si on a le choix, disons qu'on prend le premier par exemple).

On peut alors vérifier que les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont adjacentes. En effet, pour tout  $n$ ,  $a_{n+1}$  est soit  $a_n$ , soit  $m_n$  qui est dans  $[a_n, b_n]$ , donc dans les deux cas  $a_{n+1} \geq a_n$ . Cela montre que  $(a_n)$  est croissante. On voit de même que  $(b_n)$  est décroissante. Enfin, la construction fait que la longueur des intervalles considérés est divisée par deux à chaque étape :  $(b_n - a_n)$  est une suite géométrique de raison  $1/2$ , donc elle tend vers 0. On déduit du théorème 4 que  $(a_n)$  et  $(b_n)$  convergent vers une même limite  $\ell$ .

On bâtit maintenant par récurrence une extractrice  $\varphi$  telle que, pour tout  $n$ ,  $u_{\varphi(n)} \in [a_n, b_n]$ . Comme  $[a_0, b_0]$  contient tous les termes de la suite, on peut choisir  $\varphi(0) = 0$ . Supposons  $\varphi(n)$  construit convenablement pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . Puisque l'intervalle  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$  contient une infinité de termes

de la suite, il contient des termes  $u_k$  dont l'indice  $k$  vérifie  $k \geq \varphi(n) + 1$ . On choisit par exemple le plus petit  $k$  qui convient et on pose  $\varphi(n+1) = k$ . Ceci définit une application  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $\varphi(n+1) \geq \varphi(n) + 1$  pour tout  $n$  :  $\varphi$  est une extractrice. De plus, par construction, on a pour tout  $n$  :  $u_{\varphi(n)} \in [a_n, b_n]$ , i.e.  $a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n$ . Puisque  $(a_n) \rightarrow \ell$  et  $(b_n) \rightarrow \ell$ , le théorème des gendarmes montre que  $(u_{\varphi(n)})$  converge vers  $\ell$ .

**Étape 2.** Traitons maintenant le cas général, celui d'une suite bornée  $(u_n)$ , à valeurs complexes. Les suites réelles  $(\operatorname{Re}(u_n))$  et  $(\operatorname{Im}(u_n))$  sont alors bornées. On peut appliquer l'étape 1 à la suite réelle  $(\operatorname{Re}(u_n))$  : cela nous donne une extractrice  $\varphi_1$  telle que  $(\operatorname{Re}(u_{\varphi_1(n)}))$  converge. Considérons maintenant la suite  $(v_n) = (u_{\varphi_1(n)})$ , dont la partie réelle converge par construction. Sa partie imaginaire est bornée, donc on peut lui appliquer l'étape 1 : cela nous donne une extractrice  $\varphi_2$  telle que la partie imaginaire de  $(v_{\varphi_2(n)})$  converge. La partie réelle de  $(v_{\varphi_2(n)})$  converge aussi, puisque c'est une sous-suite de la suite convergente  $(\operatorname{Re}(v_n))$ . Donc la suite complexe  $(v_{\varphi_2(n)})$  est convergente. Or  $(v_{\varphi_2(n)}) = (u_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)})$  est une sous-suite de  $(u_n)$ , comme sous-suite d'une sous-suite.  $\diamond$

REMARQUE 13. Quid des suites non bornées ? On peut parfois extraire d'une suite non bornée une sous-suite convergente. Par exemple, si on pose  $u_n = 0$  si  $n$  est pair et  $u_n = n$  si  $n$  est impair, on voit que la suite  $(u_n)$  n'est pas bornée et que sa sous-suite  $(u_{2n})$  est constante donc convergente.

Le lecteur pourra d'autre part démontrer qu'une suite non bornée admet toujours une sous-suite de module tendant vers  $+\infty$ .

REMARQUE 14. Le théorème de Bolzano-Weierstrass s'étend aux suites vectorielles bornées, c'est-à-dire aux suites d'éléments de  $\mathbb{R}^d$  dont toutes les composantes sont bornées. La preuve est la même que dans le cas complexe : on extrait une sous-suite pour faire converger la première composante, puis on extrait une sous-suite de cette sous-suite pour faire converger la deuxième composante, etc. En  $d$  extractions successives, on obtient une sous-suite dont toutes les composantes convergent.

### Pour aller plus loin 1 : valeurs d'adhérence

Quand une suite  $(u_n)$  admet une sous-suite convergeant vers  $\ell$ , on dit que  $\ell$  est une *valeur d'adhérence* de  $(u_n)$ . Par exemple, les valeurs d'adhérence de la suite  $((-1)^n + 1/n)$  sont 1 et  $-1$ . Celles de la suite  $(i^n)$  sont 1,  $i$ ,  $-1$  et  $-i$ . Le théorème de Bolzano-Weierstrass dit qu'une suite bornée a toujours au moins une valeur d'adhérence. Mais il n'y en a pas toujours : si  $|u_n|$  tend vers  $+\infty$ , ses sous-suites tendent aussi vers  $+\infty$ , donc  $(u_n)$  n'a pas de valeur d'adhérence.

On peut formuler un critère de convergence à l'aide des valeurs d'adhérence : *une suite bornée est convergente si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.*

Le sens direct est clair : si  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ , il en va de même de toutes ses sous-suites, donc  $\ell$  est l'unique valeur d'adhérence de  $(u_n)$ . Considérons maintenant une suite  $(u_n)$  bornée et divergente. Par

Bolzano-Weierstrass,  $(u_n)$  a une valeur d'adhérence  $\ell$ . Puisqu'elle est divergente, on peut trouver  $\varepsilon > 0$  tel qu'une infinité de termes de la suite se trouvent hors du disque  $D(\ell, \varepsilon)$ . Ceci permet de bâtir une sous-suite  $(v_n)$  de  $(u_n)$  telle que  $|v_n - \ell| \geq \varepsilon$  pour tout  $n$ . Comme  $(v_n)$  est bornée (comme sous-suite d'une suite bornée), elle admet une sous-suite convergente  $(w_n)$ . La limite  $\ell'$  de  $(w_n)$  vérifie alors  $|\ell' - \ell| \geq \varepsilon$  par passage à la limite. Donc  $\ell$  et  $\ell'$  sont deux valeurs d'adhérence distinctes de  $(u_n)$ , ce qui achève de prouver le critère.

## 2. Continuité et dérivabilité

**2.1. Limites et continuité.** Dans toute cette section, on va s'intéresser à des fonctions définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On commence par définir ce qu'est la limite de la fonction en un point  $a$ . Pour définir la continuité, on pourrait se contenter de prendre  $a$  dans  $I$ . Néanmoins, il est aussi intéressant de prendre pour  $a$  l'une des bornes de  $I$ , même si elle n'est pas dans  $I$ . On choisira en fait  $a$  dans  $\bar{I}$ , le plus petit intervalle fermé contenant  $I$ . Par exemple, si  $I = ]\alpha, \beta]$ ,  $\bar{I} = [\alpha, \beta]$ .<sup>1</sup>

### Énoncé indispensable 5 : limite

Soit une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Soient  $a \in \bar{I}$  et  $\ell \in \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  tend vers  $\ell$  en  $a$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \quad |x - a| < \eta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Dans ce cas, on note  $\lim_a f = \ell$ .

On dit aussi que  $f$  a pour limite  $\ell$  en  $a$ , ou bien que  $f(x)$  tend vers  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $a$  et on note aussi  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ .

REMARQUE 15. La définition donnée admet des variantes utiles où la limite est infinie ( $\ell = \pm\infty$ ) ou bien est prise à l'infini ( $a = \pm\infty$ ). Il suffit d'adapter l'énoncé... On dit ainsi que  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $a$  si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \quad |x - a| < \eta \implies f(x) > A$$

et que  $f$  tend vers  $-\infty$  en  $a$  si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \quad |x - a| < \eta \implies f(x) < A.$$

Quand la borne supérieure de  $I$  est  $+\infty$ , on dit que  $f$  tend vers  $\ell$  en  $+\infty$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in I, \quad x > B \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

on dit que  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$  si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B > 0, \forall x \in I, \quad x > B \implies f(x) > A,$$

on dit que  $f$  tend vers  $-\infty$  en  $+\infty$  si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B > 0, \forall x \in I, \quad x > B \implies f(x) < A.$$

Le lecteur est invité à écrire les expressions quantifiées traduisant les limites analogues en  $-\infty$ .

REMARQUE 16. On parle de limite à gauche (resp. droite) en  $a$  quand on ne regarde  $f$  qu'à gauche (resp. droite) de  $a$ . Plus précisément, on dit que  $f$  admet  $\ell$  comme limite à gauche en  $a$  et on note  $\lim_{a^-} f = \ell$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \quad a - \eta < x < a \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Bien sûr, pour la limite à droite, on note  $\lim_{a^+} f = \ell$  quand

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \quad a < x < a + \eta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

<sup>1</sup> Le lecteur pointilleux observera que  $I$  sera parfois autorisé à être, non un intervalle, mais une réunion d'intervalles, auquel cas  $\bar{I}$  contiendra les bornes de tous ces intervalles.



On peut définir de même des limites infinies à gauche ou à droite.

Il est important de savoir que ces limites de fonctions se ramènent à des limites de suites : faire tendre  $x$  vers  $a$ , c'est regarder toutes les suites qui convergent vers  $a$ . C'est ce qu'on appelle la caractérisation séquentielle des limites.

**PROPOSITION 8.** Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction,  $a \in \bar{I}$  et  $\ell \in \mathbb{R}$ . Alors  $f(x)$  tend vers  $\ell$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  si et seulement si, pour toute suite  $(x_n)$  d'éléments de  $I$  qui converge vers  $a$ , la suite  $(f(x_n))$  converge vers  $\ell$ .

En adaptant l'argument ci-dessous, on voit que cet énoncé est également vrai pour des limites infinies, ou prises à l'infini.

*Démonstration.* Pour le sens direct, on se donne une suite  $(x_n)$  qui converge vers  $a$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Par hypothèse, il existe  $\eta > 0$  tel que

$$\forall x \in I, \quad |x - a| < \eta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Comme il existe  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $|x_n - a| < \eta$ , on a ainsi

$$\forall n \geq N, \quad |f(x_n) - \ell| < \varepsilon.$$

Donc  $(f(x_n))$  converge vers  $\ell$ .

Pour le sens réciproque, on raisonne par contraposée : on suppose que  $f$  ne tend pas vers  $\ell$  en  $a$  et cherche à montrer qu'il existe une suite  $(x_n) \rightarrow a$  telle que  $(f(x_n))$  ne converge pas vers  $\ell$ . En niant la définition d'une limite, on trouve qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\forall \eta > 0, \exists x \in I, \quad |x - a| < \eta \text{ et } |f(x) - \ell| \geq \varepsilon$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on peut prendre en particulier  $\eta = \frac{1}{n}$  et on dispose ainsi d'un  $x_n \in I$  tel que

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon.$$

Puisque  $1/n$  tend vers 0, la suite  $(x_n)$  tend vers  $a$ . Par contre, la suite  $(f(x_n))$  reste à distance au moins  $\varepsilon$  de  $\ell$ , donc elle ne converge pas vers  $\ell$ .  $\diamond$

### Énoncé indispensable 6 : continuité

Soit une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est *continue en un point*  $a$  de  $I$  si elle tend vers  $f(a)$  en  $a$ . Cela signifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \quad |x - a| < \eta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

On dit simplement que la fonction  $f$  est *continue* (sur  $I$ ) si elle est continue en tout point de  $I$ .

### Test : un usage typique

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que  $f(0) = 1$ . Prouver qu'il existe  $\alpha > 0$  telle que  $f$  soit minorée par  $1/2$  sur l'intervalle  $]-\alpha, \alpha[$ .

REMARQUE 17. La continuité, en lien avec la proposition 8, est un outil important pour calculer des limites : si  $f$  est continue en  $a$  et si  $(x_n) \rightarrow a$ , alors la suite  $(f(x_n))$  tend vers  $f(a)$ . C'est la continuité de la fonction  $\exp$  qui permet d'écrire  $(\exp(1/n)) \rightarrow \exp(0) = 1$ .

Par propriétés sur les limites (de suites), on obtient des résultats sur la somme, le produit ou l'inverse des fonctions continues.

PROPOSITION 9. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

- (1) Si  $f$  et  $g$  sont continues en un point  $a$  de  $I$ , leur somme  $f + g$  et leur produit  $f \times g$  sont continus en  $a$ .
- (2) On suppose que  $f$  ne s'annule pas, de sorte que  $1/f$  est bien définie sur  $I$ . Si  $f$  est continue en  $a \in I$ ,  $1/f$  est aussi continue en  $a$ .

Par exemple, on vérifie sur la définition que les fonctions constantes et la fonction  $f : x \mapsto x$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ . Avec la proposition, on en déduit que les polynômes (réels) définissent des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ . Par quotient, les fractions rationnelles définissent donc des fonctions continues aux points où elles sont définies (là où leur dénominateur ne s'annule pas).

PROPOSITION 10. Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ . Soient deux fonctions  $f : I \rightarrow J$  et  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  est continue en un point  $a$  de  $I$  et que  $g$  est continue en  $f(a)$ . Alors la fonction  $g \circ f$  est continue en  $a$ .

*Démonstration.* Comme les valeurs de  $f$  sont bien prises dans  $J$ , où  $g$  est définie, la fonction  $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est bien définie. Soit  $(x_n)$  une suite de  $I$  tendant vers  $a$ . Par continuité de  $f$  en  $a$ , la suite  $(f(x_n))$  converge vers  $f(a)$ . Par continuité de  $g$  en  $f(a)$ , on en déduit que la suite  $(g(f(x_n)))$  converge vers  $g(f(a))$ . Cela prouve que  $g \circ f$  tend vers  $g \circ f(a)$  en  $a$ , par la proposition 8.  $\diamond$

EXEMPLE 13. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = 1$  si  $x \geq 0$  et  $f(x) = 0$  si  $x < 0$ . Cette fonction n'est pas continue en 0 : en effet, la suite  $(x_n) = (-1/n)$  tend vers 0 et  $(f(x_n))$  est constante à 0, donc tend vers 0, qui n'est pas  $f(0) = 1$ . La discontinuité en 0 est due au « saut » que le graphe de  $f$  effectue en  $x = 0$  : les valeurs sautent de 0 à 1.

REMARQUE 18. On dit que  $f$  est continue à droite en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$  et continue à gauche en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ . La continuité en  $a$  équivaut à la continuité à gauche et à droite. Dans l'exemple précédent,  $f$  est continue à droite en 0, mais pas à gauche.

REMARQUE 19. Supposons que  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue et que  $f$  admet une limite  $\ell$  en  $a$ . Il est naturel de prolonger  $f$  par la valeur  $\ell$  en  $a$  : on définit  $\tilde{f} : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  par  $\tilde{f}(x) = f(x)$  si  $x \in ]a, b[$  et  $\tilde{f}(a) = \ell$ . Par construction, cette nouvelle fonction est continue sur  $[a, b[$  tout entier. On dit que la fonction  $\tilde{f}$  est le *prolongement par continuité* de  $f$  à  $[a, b[$ . Par exemple, la fonction  $f : x \mapsto x \ln(x)$ , définie et continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ , tend vers 0 en 0 : elle se prolonge par continuité à  $\mathbb{R}_+$  en posant  $\tilde{f}(0) = 0$ .

**2.2. Propriétés globales des fonctions continues.** On dit souvent que le graphe des fonctions continues se trace sans lever le crayon. C'est le contenu du théorème fondamental suivant.

**Énoncé indispensable 7 : théorème des valeurs intermédiaires**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors pour tout  $y$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = y$ .

*Démonstration.* Quitte à changer  $f$  en  $-f$ , on peut supposer par exemple  $f(a) \geq f(b)$ . L'énoncé est clair si  $y = f(a)$  ou  $y = f(b)$  donc on considère un réel  $y$  tel que  $f(b) < y < f(a)$ . On pose

$$\mathcal{C} = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq y\}.$$

C'est une partie de  $[a, b]$  non vide (elle contient  $b$ ), donc  $c = \inf \mathcal{C}$  est un nombre réel bien défini. Par définition de la borne inférieure, il existe une suite  $(c_n)$  de points de  $\mathcal{C}$  qui converge vers  $c$ . Alors pour tout indice  $n$  :

$$a \leq c_n \leq b \quad \text{et} \quad f(c_n) \leq y.$$

Par continuité de  $f$  en  $c$ , la suite  $(f(c_n))$  converge vers  $f(c)$ . Donc en passant à la limite, on trouve :

$$a \leq c \leq b \quad \text{et} \quad f(c) \leq y.$$

Comme on a supposé  $y < f(a)$ , on trouve  $f(c) < f(a)$ , donc  $c \neq a$ . Ainsi  $a < c \leq b$ . Pour  $n$  assez grand,  $c - \frac{1}{n}$  est donc dans  $[a, b]$  mais pas dans  $\mathcal{C}$  (puisque  $c$  est la borne inférieure de  $\mathcal{C}$ ). Donc

$$f\left(c - \frac{1}{n}\right) > y,$$

ce qui donne à la limite, toujours par continuité de  $f$  :

$$f(c) \geq y.$$

On en conclut que  $f(c) = y$ . ◇

Si  $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $I$ , le théorème des valeurs intermédiaires montre que l'ensemble des valeurs prises par  $f$  est aussi un intervalle  $J$ . Les bornes de  $J$  sont bien sûr :

$$\inf J = \inf\{f(x) \mid x \in I\} \quad \text{et} \quad \sup J = \sup\{f(x) \mid x \in I\}.$$

On les note respectivement  $\inf_I f$  et  $\sup_I f$ . Ces bornes sont éventuellement  $\pm\infty$  si  $f$  n'est pas minorée ou pas majorée sur  $I$ .

Même si ces bornes sont finies, ce ne sont pas forcément des valeurs atteintes par la fonction  $f$  : l'intervalle  $J$  peut être ouvert ou semi-ouvert. Par exemple, si on considère  $f : x \rightarrow x^2$  sur l'intervalle  $I = ]-1, 1[$ , on trouve  $J = [0, 1[$  ;  $0 = f(0)$ , mais  $1$  n'est pas une valeur atteinte. Le théorème suivant précise la situation quand  $I$  est un segment  $[a, b]$  : il dit qu'une fonction continue sur un *segment* est bornée et atteint ses bornes.

### Énoncé indispensable 8 : théorème des bornes atteintes

Soit  $f$  une fonction continue sur un segment  $[a, b]$ . Alors  $f$  atteint une valeur maximale  $M$  et une valeur minimale  $m$  sur  $[a, b]$ .

On dit que  $M$  est le maximum de  $f$ , que  $m$  est son minimum et on note

$$m = \min_{[a,b]} f \quad \text{et} \quad M = \max_{[a,b]} f.$$

La notation  $\max$  (resp.  $\min$ ) au lieu de  $\sup$  (resp.  $\inf$ ) sous-entend que ce sont des valeurs atteintes : il existe  $x_{\min}$  et  $x_{\max}$  dans  $[a, b]$  tels que  $m = f(x_{\min})$  et  $M = f(x_{\max})$ .

*Démonstration.* Soit  $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ , un nombre réel ou bien  $+\infty$ . Il existe une suite  $(x_n)$  de points de  $[a, b]$  telle que  $(f(x_n))$  tend vers  $M$  (cf. exemples 5 et 11). La suite  $(x_n)$  est bornée donc le théorème de Bolzano-Weierstrass permet d'en extraire une sous-suite  $(x_{\varphi(n)})$  qui converge, vers  $x \in [a, b]$ . D'une part, comme sous-suite de  $(f(x_n))$ ,  $(f(x_{\varphi(n)}))$  tend vers  $M$ . D'autre part, par continuité de  $f$  en  $x$ ,  $(f(x_{\varphi(n)}))$  tend vers  $f(x)$ . Donc  $M = f(x)$ . Cela veut dire  $M$  est une valeur atteinte par  $f$  et donc, en particulier, un nombre réel (fini).

On procède de même pour la borne inférieure. ◇

**COROLLAIRE 2.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors l'ensemble  $J$  des valeurs prises par  $f$  est un segment :  $J = [m, M]$ .

*Démonstration.* Le théorème des valeurs intermédiaires a montré que  $J$  était un intervalle. Le théorème des bornes atteintes montre que  $m = \inf J$  et  $M = \sup J$  sont dans  $J$ . Donc  $J = [m, M]$ . ◇

**2.3. Fonctions dérivables.** La définition usuelle de la dérivée consiste à la voir comme la limite du taux de variation.

### Énoncé indispensable 9 : dérivabilité

Soient un intervalle  $I$  et une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est *dérivable en un point*  $a$  de  $I$  si  $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$  admet une limite finie quand  $x$  tend vers  $a$ . Cette limite est notée  $f'(a)$ , c'est la *dérivée* de  $f$  en  $a$ .

On dit simplement que la fonction  $f$  est *dérivable* (sur  $I$ ) si elle est dérivable en tout point de  $I$ .

Géométriquement, la dérivée en  $a$  est la pente de la tangente au graphe de  $f$  au point  $(a, f(a))$ .

La dérivabilité en un point est équivalente à l'existence d'un développement limité d'ordre 1 : c'est le contenu du prochain théorème. Dans son énoncé, la notation  $o(x-a)$  désigne n'importe quelle quantité qui tend vers 0 plus vite que  $x-a$  quand  $x$  tend vers  $a$ . Cela signifie que le quotient  $\frac{o(x-a)}{x-a}$

tend vers 0. On peut aussi penser que  $o(x - a)$  désigne n'importe quelle expression du type  $(x - a)e(x)$  avec  $\lim_{x \rightarrow a} e(x) = 0$ . On suppose le lecteur familier des manipulations usuelles de développements limités.

**THÉOREME 5.** *Soient un intervalle  $I$  et une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Pour tout  $a \in I$ , il y a équivalence entre les deux assertions suivantes.*

(1)  *$f$  est dérivable en  $a$ .*

(2)  *$f$  admet en  $a$  un développement limité d'ordre 1 :*

$$f(x) = f(a) + \alpha(x - a) + o(x - a) \quad \text{quand } x \rightarrow a.$$

Dans ce cas,  $\alpha = f'(a)$ .

*Démonstration.* C'est au fond une simple reformulation. Si on suppose (2), en faisant tendre  $x$  vers  $a$ , on trouve

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \alpha + \frac{o(x - a)}{x - a} \rightarrow \alpha.$$

Donc  $f$  est dérivable en  $a$  et  $f'(a) = \alpha$ . Réciproquement, si on suppose (1), le taux de variation  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  tend vers une limite  $\alpha \in \mathbb{R}$ , ce qui s'écrit :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \alpha + o(1) \quad \text{quand } x \rightarrow a,$$

puisque  $o(1)$  désigne par définition une quantité tendant vers 0. En multipliant par  $x - a$ , il vient

$$f(x) - f(a) = \alpha(x - a) + o(x - a),$$

d'où le développement limité. ◇

En particulier, la dérivabilité implique la continuité : non seulement  $f(x)$  tend vers  $f(a)$  quand  $x$  tend vers  $a$ , mais le développement limité à l'ordre 1 précise à quelle vitesse.

**COROLLAIRE 3.** *Si  $f$  est dérivable en  $a$ ,  $f$  est continue en  $a$ .*

*Démonstration.* Le théorème ci-dessus donne le développement limité

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a) \quad \text{quand } x \rightarrow a.$$

Les termes  $f'(a)(x - a)$  et  $o(x - a)$  tendent vers 0 quand  $x$  tend vers  $a$ , donc  $f(x)$  tend vers  $f(a)$ . ◇

Le développement limité à l'ordre 1 éclaire bien la compatibilité de la dérivation avec sommes et produits.

**PROPOSITION 11.** *Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables en un point  $a$ . Alors  $f + g$  et  $f \times g$  sont dérivables en  $a$  et*

$$\begin{aligned} (f + g)'(a) &= f'(a) + g'(a) \\ (fg)'(a) &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a). \end{aligned}$$

*Démonstration.* Quand  $x \rightarrow a$ , on dispose des développements limités :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a), \\ g(x) &= g(a) + g'(a)(x - a) + o(x - a). \end{aligned}$$

La somme donne

$$f(x) + g(x) = f(a) + g(a) + (f'(a) + g'(a))(x - a) + o(x - a).$$

Le produit donne

$$f(x)g(x) = f(a)g(a) + (f'(a)g(a) + g'(a)f(a))(x - a) + o(x - a).$$

Et le théorème permet de conclure.  $\diamond$

**PROPOSITION 12.** *Soit  $f$  une fonction ne s'annulant pas sur un intervalle  $I$ . Si  $f$  est dérivable en un point  $a$  de  $I$ , alors  $1/f$  est dérivable en  $a$  et  $\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f(a)^2}$ .*

*Démonstration.* Commençons par remarquer que  $1/f$  est bien définie sur  $I$  parce que  $f$  ne s'annule pas sur  $I$ . Le taux de variation de  $1/f$  en  $a$  s'écrit

$$\frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}}{x - a} = -\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \frac{1}{f(x)} \frac{1}{f(a)}$$

donc tend vers  $-\frac{f'(a)}{f(a)^2}$  quand  $x \rightarrow a$ . Dans le membre de droite, le premier facteur est en effet le taux de variation de  $f$ , qui tend vers  $f'(a)$ , et le deuxième tend vers  $\frac{1}{f(a)^2}$  par continuité de  $f$  en  $a$ .  $\diamond$

En combinant les formules pour la dérivée d'un produit et d'un inverse, on obtient l'expression bien connue pour la dérivée d'un quotient :  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ . Comme pour la continuité, on déduit par exemple de ces résultats que les polynômes et fractions rationnelles définissent des fonctions dérivables.

**PROPOSITION 13.** *Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ . Soient deux fonctions  $f : I \rightarrow J$  et  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  est dérivable en un point  $a$  de  $I$  et que  $g$  est dérivable en  $f(a)$ . Alors la fonction  $g \circ f$  est dérivable en  $a$  et*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a).$$

*Démonstration.* Posons  $b = f(a)$ . L'idée est de composer les développements limités de  $f(x)$  quand  $x \rightarrow a$  et  $g(y)$  quand  $y \rightarrow b$ , en posant  $y = f(x)$ . On peut le faire puisque, si  $x$  tend vers  $a$ ,  $f(x)$  tend  $b = f(a)$  par continuité de  $f$  en  $a$ . On part donc des développements

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + (x - a)(f'(a) + e_f(x)), \\ g(y) &= g(b) + (y - b)(g'(b) + e_g(y)), \end{aligned}$$

où  $e_f(x)$  (resp.  $e_g(y)$ ) tend vers 0 quand  $x \rightarrow a$  (resp.  $y \rightarrow b$ ). Avec  $y = f(x)$  et  $b = f(a)$ , on en déduit :

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(b) + (x - a)(f'(a) + e_f(x))(g'(b) + e_g(f(x))) \\ &= g(b) + (x - a)f'(a)g'(b) + o(x - a) \\ &= g(f(a)) + (x - a)f'(a)g'(f(a)) + o(x - a). \end{aligned}$$

Cela montre que  $g \circ f$  est dérivable en  $a$ , de dérivée  $f'(a)g'(f(a))$ .  $\diamond$

**REMARQUE 20.** On dit que  $f$  est dérivable à gauche (resp. droite) en  $a$  si le taux de variation  $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$  admet une limite finie en  $a^-$  (resp. en  $a^+$ ). On parle de dérivée à gauche ou à droite pour désigner ces limites à gauche ou à droite. Une fonction est dérivable en  $a$  si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite avec des dérivées à gauche et à droite égales.

Par exemple, en 0, la valeur absolue admet une dérivée à gauche égale à  $-1$  et une dérivée à droite égale à  $1$ . Cette fonction n'est donc pas dérivable en 0. C'est un exemple de fonction continue mais pas dérivable en 0.

**2.4. Propriétés globales des fonctions dérivables.** La dérivée fournit un moyen pratique pour trouver les endroits où une fonction est maximale ou minimale. Le résultat de base est le suivant.

#### Énoncé indispensable 10 : dérivée et extrema

Soit  $f : ]\alpha, \beta[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable. On suppose que  $f$  atteint un maximum ou un minimum en un point  $a$  de l'intervalle ouvert  $] \alpha, \beta[$ . Alors  $f'(a) = 0$ .

Géométriquement : en un point de maximum ou minimum, la tangente au graphe est de pente nulle, c'est-à-dire horizontale.

Attention : ce n'est vrai que sur un intervalle ouvert. Par exemple, regardons la fonction  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x$ . Elle est maximale en  $a = 1$  et pourtant  $f'(1) = 1 \neq 0$ . Le critère ne vaut que si la fonction prend des valeurs plus grandes (ou plus petites) à gauche et à droite de  $a$  ; on le verra dans la preuve ci-dessous. En pratique, si on n'est pas sur un intervalle ouvert, il faudra toujours traiter à part les bornes de l'intervalle d'étude.

Insistons sur le fait que ce théorème ne donne qu'une condition nécessaire : la fonction  $f : x \mapsto x^3$  est dérivable sur  $] -1, 1[$ , sa dérivée s'annule en 0 et la fonction n'y atteint ni maximum, ni minimum.

**Démonstration.** Supposons  $f$  maximale en  $a$  :  $f(x) - f(a) \leq 0$  pour tout  $x \in ]\alpha, \beta[$ . Puisque  $\alpha < a < \beta$ , on peut trouver des suites  $(x_n^+)$  et  $(x_n^-)$  convergeant vers  $a$ , avec  $\alpha < x_n^- < a$  et  $a < x_n^+ < \beta$  pour tout indice  $n$  (prendre  $x_n^\pm = a \pm 1/n$  pour  $n$  assez grand). Alors :

$$\frac{f(x_n^+) - f(a)}{x_n^+ - a} \rightarrow f'(a)$$

et le membre de gauche est négatif, donc  $f'(a) \leq 0$ . De même,

$$\frac{f(x_n^-) - f(a)}{x_n^- - a} \rightarrow f'(a)$$

avec un membre de gauche positif cette fois :  $f'(a) \geq 0$ . Donc finalement  $f'(a) = 0$ . Le cas d'un minimum est similaire.  $\diamond$

Un problème courant consiste à chercher la valeur maximale (ou minimale) que peut prendre une fonction dérivable  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ . Le théorème des bornes atteintes dit qu'il existe un point  $a$  du segment  $[\alpha, \beta]$  où  $f$  est maximale. Si ce point  $a$  est dans l'intervalle ouvert  $] \alpha, \beta [$ , il vérifie l'équation  $f'(a) = 0$ . Le maximum de  $f$  est donc atteint en  $\alpha$ , en  $\beta$  ou en l'une des solutions  $a$  de cette équation. Pour conclure, il reste à comparer les valeurs que prend  $f$  en ces différents points (notamment aux bornes du segment!).

EXEMPLE 14. Considérons la fonction  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2$ . Elle est dérivable et sa dérivée ne s'annule qu'en 0. Pour la maximiser, on compare donc :  $f(-1) = 1$ ,  $f(1) = 1$  et  $f(0) = 0$ . On conclut que le maximum est 1, atteint uniquement aux bornes  $-1$  et  $1$  du segment. Le minimum est quant à lui atteint en 0 et il vaut 0.

Cette discussion mène naturellement au théorème de Rolle, qu'on perfectionnera légèrement pour obtenir un outil très important : le théorème des accroissements finis.

THÉORÈME 6 (théorème de Rolle). Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $a < b$ . On suppose que  $f$  est dérivable sur  $]a, b[$ , continue sur  $[a, b]$  et que  $f(a) = f(b)$ . Alors il existe un point  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

Démonstration. Le théorème des bornes atteintes affirme que  $f$  atteint un minimum  $m$  et un maximum  $M$  sur le segment  $[a, b]$ .

Si l'un d'entre eux est atteint en un point  $c$  de  $]a, b[$ , on a  $f'(c) = 0$  par le résultat précédent.

Sinon, c'est qu'ils sont tous les deux atteints aux bornes du segment. Comme  $f$  prend la même valeur en  $a$  et  $b$ , le maximum  $M$  et le minimum  $m$  sont alors égaux. Puisque par construction, on a  $m \leq f(x) \leq M$  pour tout  $x \in [a, b]$ , on voit que la fonction  $f$  est constante à la valeur  $m = M$  dans ce cas. Donc sa dérivée est nulle en tout point  $c$  de l'intervalle  $]a, b[$ .  $\diamond$

REMARQUE 21. En pratique, ce théorème (et les suivants) s'applique à une fonction qui est dérivable sur un intervalle contenant le segment  $[a, b]$ . Comme la dérivabilité implique la continuité, les hypothèses sont vérifiées.

### Énoncé indispensable 11 : égalité des accroissements finis

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $a < b$ . On suppose que  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).$$

Démonstration. Soit  $g$  la fonction affine telle que  $g(a) = f(a)$  et  $g(b) = f(b)$ . Explicitement, elle est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$



La fonction  $h = f - g$  est dérivable et le choix de  $g$  donne  $h(a) = h(b) = 0$ . Le théorème de Rolle s'applique donc, donnant l'existence de  $c \in ]a, b[$  tel que  $h'(c) = 0$ . Or la dérivée de  $h$  se calcule immédiatement :

$$\forall x \in ]a, b[, \quad h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

On en déduit :  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

◇

**COROLLAIRE 4.** *Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .*

*Si  $f'$  est positive,  $f$  est croissante.*

*Si  $f'$  est strictement positive,  $f$  est strictement croissante.*

*Si  $f'$  est négative,  $f$  est décroissante.*

*Si  $f'$  est strictement négative,  $f$  est strictement décroissante.*

*Si  $f'$  est identiquement nulle,  $f$  est constante.*

*Démonstration.* Si  $a < b$  sont deux points de  $I$ , l'égalité des accroissements finis donne un point  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$ . Donc  $f(b) - f(a)$  est  $\geq 0$ ,  $> 0$ ,  $\leq 0$ ,  $< 0$  ou  $= 0$  si et seulement si  $f'(c)$  l'est. Le corollaire en découle.

◇

Plutôt que l'égalité, on utilise souvent l'inégalité des accroissements finis. Elle dit qu'une borne sur la dérivée contrôle l'ampleur des variations de la fonction sur un segment donné. Concrètement, si on court à moins de 21km/h entre 9h et 11h du matin, on parcourt moins de 42km.

### Énoncé indispensable 12 : inégalité des accroissements finis

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . Alors :

$$|f(b) - f(a)| \leq (b - a) \sup_{]a, b[} |f'|.$$

*Démonstration.* L'égalité des accroissements finis  $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$  donne en valeur absolue

$$|f(b) - f(a)| = (b - a) |f'(c)|$$

et la majoration suit, par définition de la borne supérieure.

◇

Pour que l'inégalité ait un intérêt, il faut que la borne supérieure dans le membre de droite soit finie. Typiquement, ce sera vrai si la fonction dérivée  $f'$  est continue sur le segment  $[a, b]$  (par le théorème des bornes atteintes), c'est-à-dire si la fonction  $f$  y est de classe  $C^1$ .

**REMARQUE 22.** Si la dérivée de  $f$  est majorée en valeur absolue par  $\kappa$  sur l'intervalle  $I$  tout entier, l'inégalité des accroissements finis donne :

$$\forall x, y \in I, \quad |f(y) - f(x)| \leq \kappa |y - x|,$$

On dit alors que  $f$  est  $\kappa$ -lipschitzienne. Pour une telle fonction, les variations de  $f(x)$  sont au plus proportionnelles à celles de  $x$ . Ce contrôle uniforme

peut s'avérer utile en pratique, par exemple dans la théorie des équations différentielles.

**2.5. Fonctions réciproques, nouvelles fonctions usuelles.** Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux fonctions continues qui sont strictement monotones, c'est-à-dire strictement croissantes ou strictement décroissantes, sur un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On peut les voir comme des bijections entre intervalles, ce qui permet de définir une fonction réciproque aux propriétés intéressantes.

Soit  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$ . Notons  $J$  l'ensemble de ses valeurs :

$$J = \{f(x) \mid x \in I\}.$$

C'est un intervalle d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Par définition de  $J$ , la fonction  $f : I \rightarrow J$  est surjective. La stricte monotonie de  $f$  fait qu'elle est aussi injective : si  $x < y$  sont deux points de  $I$ , on a  $f(x) < f(y)$  (resp.  $f(x) > f(y)$ ) si  $f$  est strictement croissante (resp. décroissante), et en tout cas  $f(x) \neq f(y)$ .

Ainsi,  $f : I \rightarrow J$  est une bijection.

REMARQUE 23. Dans le programme officiel de terminale, « on convient que les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré ». Pour chacune de ces flèches obliques, on obtient donc une bijection.

REMARQUE 24. On peut préciser les bornes de l'intervalle  $J$  (un dessin l'indique assez clairement). Notons  $a = \inf I$ ,  $b = \sup I$ ,  $\alpha = \inf J$ ,  $\beta = \sup J$  (on autorise les valeurs infinies). On suppose  $f$  strictement croissante pour fixer les idées (si  $f$  est strictement décroissante, la discussion s'adapte en changeant l'ordre des bornes de  $J$ ).

Montrons dans ce cas que  $f$  tend vers  $\beta$  en  $b$ . On écrit la preuve dans le cas où  $\beta$  est fini. Etant donné  $\varepsilon > 0$ , par définition du sup, on peut trouver  $x_\varepsilon \in I$  tel que  $f(x_\varepsilon) \geq \beta - \varepsilon$ . Par définition de  $\beta$  et croissance de  $f$ , si  $x_\varepsilon \leq x < b$ , on a  $\beta - \varepsilon \leq f(x) \leq \beta$ . Cela prouve que  $f$  tend vers  $\beta$  en  $b$ . Si  $\beta = +\infty$ ,  $f$  n'est pas majorée et le même argument montre que  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $b$ . De même,  $f$  tend vers  $\alpha$  en  $a$ . Donc les bornes de  $J$  sont

$$\alpha = \lim_a f \quad \text{et} \quad \beta = \lim_b f.$$

Si  $b \in I$ ,  $f$  est continue en  $b$ , donc  $\beta = \lim_b f = f(b)$ , et en particulier  $\beta \in J$ . Si au contraire la borne supérieure  $b$  de  $I$  n'est pas dans  $I$ ,  $\beta$  n'est pas une valeur atteinte : si on avait  $\beta = f(c)$  pour un certain  $c \in I$  (donc  $c < b$ ), n'importe quel  $x \in ]c, b[$  vérifierait  $f(x) > f(c) = \beta$  par stricte croissance, ce qui contredirait la définition de  $\beta$ . Donc  $\beta \in J$  si et seulement si  $b \in I$ . Il en est de même pour  $\alpha$  et  $a$ . Bref :

- si  $I = [a, b]$ ,  $J = [\alpha, \beta]$ , avec  $\alpha = f(a)$  et  $\beta = f(b)$  ;
- si  $I = [a, b[$ ,  $J = [\alpha, \beta[$ , avec  $\alpha = f(a)$  et  $\beta = \lim_b f$  ;
- si  $I = ]a, b]$ ,  $J = ]\alpha, \beta]$  avec  $\alpha = \lim_a f$  et  $\beta = f(b)$  ;
- si  $I = ]a, b[$ ,  $J = ]\alpha, \beta[$  avec  $\alpha = \lim_a f$  et  $\beta = \lim_b f$ .

Puisque  $f : I \rightarrow J$  est une bijection, on dispose d'une fonction réciproque  $f^{-1} : J \rightarrow I$  : tout point  $y$  de l'intervalle  $J$  admet un unique antécédent  $x$  dans  $I$ , que l'on note  $x = f^{-1}(y)$ . Ainsi, l'équation  $y = f(x)$ , avec  $x \in I$ , équivaut à  $x = f^{-1}(y)$ , avec  $y \in J$ . Géométriquement, cela signifie que le graphe de  $f^{-1}$  s'obtient à partir de celui de  $f$  en échangeant le rôle des coordonnées  $x$  et  $y$ , c'est-à-dire en effectuant une réflexion par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation  $y = x$ ).

L'énoncé suivant résume ce qu'on vient de voir et précise les propriétés de cette fonction réciproque  $f^{-1}$ .

### Énoncé indispensable 13 : théorème de la bijection

Soit  $f$  une fonction strictement monotone et continue sur un intervalle  $I$ . On note  $J$  l'ensemble de ses valeurs. Alors

- (1) la fonction  $f : I \rightarrow J$  est une bijection entre les intervalles  $I$  et  $J$  ;
- (2) la réciproque  $f^{-1} : J \rightarrow I$  est strictement monotone, de même sens de variation que  $f$  ;
- (3) la réciproque  $f^{-1}$  est continue sur l'intervalle  $J$  ;
- (4) si  $f$  est dérivable en un point  $a$  de  $I$  et si  $f'(a) \neq 0$ , la réciproque  $f^{-1}$  est dérivable en  $b = f(a)$ , avec

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

*Démonstration.* Le point (1) est expliqué ci-dessus. Pour le point (2), on suppose par exemple que  $f$  est strictement croissante (on peut s'y ramener en considérant  $-f$ ). Soient  $y < y'$  deux points de  $J$ . On note  $x = f^{-1}(y)$  et  $x' = f^{-1}(y')$ . Si on avait  $x \geq x'$ , la croissance de  $f$  donnerait  $y = f(x) \geq f(x') = y'$ , contradiction. On a donc  $x < x'$ . Et cela prouve la stricte croissance de  $f^{-1}$ .

Passons au point (3). Soient  $b \in J$  et  $a = f^{-1}(b) \in I$ . On suppose que  $a$  n'est pas une borne de l'intervalle  $I$  et que  $f$  est strictement croissante pour simplifier la rédaction (le cas général se traite de même). Soit  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit pour que  $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$  soit entièrement inclus dans  $I$ . Comme  $f$  est strictement croissante, on a  $f(a - \varepsilon) < f(a) = b < f(a + \varepsilon)$ . On peut fixer  $\eta > 0$  assez petit pour que  $f(a - \varepsilon) < b - \eta < b < b + \eta < f(a + \varepsilon)$ . Pour tout  $y \in ]b - \eta, b + \eta[$ , on a alors

$$f(a - \varepsilon) < y < f(a + \varepsilon)$$

et, par stricte croissance de  $f^{-1}$ , on en déduit :

$$a - \varepsilon = f^{-1}(f(a - \varepsilon)) < f^{-1}(y) < f^{-1}(f(a + \varepsilon)) = a + \varepsilon.$$

Ainsi, comme  $a = f^{-1}(b)$ , on vient de prouver que  $|y - b| < \eta$  implique  $|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)| < \varepsilon$ . D'où la continuité de  $f^{-1}$  en  $b$ .

Pour le point (4), on écrit le taux de variation de  $f^{-1}$  au point  $b = f(a)$ , en fonction de la variable  $y = f(x)$  :

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)}.$$

Quand  $y$  tend vers  $b$ ,  $x = f^{-1}(y)$  tend vers  $f^{-1}(b) = a$  par continuité de  $f^{-1}$  en  $b$ . Par dérivabilité de  $f$  en  $a$ , la quantité  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  tend donc vers  $f'(a)$ . Et comme cette limite n'est pas nulle par hypothèse, on peut passer à l'inverse et voir que le membre de droite de l'égalité ci-dessus tend vers  $1/f'(a)$ . Cela prouve que  $f^{-1}$  est dérivable en  $b$ , de dérivée  $1/f'(a)$ .  $\diamond$

REMARQUE 25. Géométriquement, si la dérivée de  $f$  s'annule en  $a$ , la tangente au graphe de  $f$  au point  $(a, f(a))$  est horizontale. Par réflexion par rapport à la première bissectrice, le graphe de  $f^{-1}$  admet une tangente verticale au point  $(f(a), a)$ , c'est-à-dire de pente infinie :  $f^{-1}$  n'est pas dérivable en  $f(a)$ .

EXEMPLE 15. On peut définir le logarithme népérien comme la primitive de la fonction inverse qui s'annule en 1<sup>2</sup>. Par construction, cette fonction est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , de dérivée strictement positive, donc strictement croissante. Par le théorème de la bijection, on peut définir l'exponentielle comme la fonction réciproque du logarithme sur cet intervalle. Et on peut prouver les propriétés usuelles de l'exponentielle... En particulier, la formule ci-dessus donne  $\exp' = \frac{1}{\ln' \circ \exp} = \exp$ .

Pour définir de nouvelles fonctions comme fonctions réciproques, on peut donc étudier les fonctions dont on dispose déjà et chercher les plus grands intervalles sur lesquels elles sont strictement monotones. Pour les fonctions trigonométriques, par périodicité, il y a une infinité de tels intervalles : il faut faire un choix et c'est arbitraire. Les définitions ci-dessous présentent les choix standards. Ces fonctions sont à connaître ! Les graphes présentés s'obtiennent à partir de ceux des fonctions trigonométriques (sinus, cosinus, tangente, *sur les domaines précisés*), en effectuant une symétrie par rapport à la première bissectrice.

### Énoncé indispensable 14 : arcsinus

La fonction sinus est continue et strictement croissante sur l'intervalle  $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Elle y prend toutes les valeurs de l'intervalle  $J = [-1, 1]$ . C'est donc une bijection entre  $I$  et  $J$  et on peut définir une fonction réciproque, appelée *arcsinus* :

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Pour  $x \in [-1, 1]$ ,  $\arcsin(x)$  est l'unique angle compris entre  $-\pi/2$  et  $\pi/2$  dont le sinus est  $x$ .

2. On montrera que toute fonction continue admet une primitive dans le chapitre sur l'intégrale.

La fonction arcsinus est strictement croissante et continue sur  $[-1, 1]$ . Elle est dérivable sur  $] -1, 1[$ , avec

$$\forall x \in ] -1, 1[, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

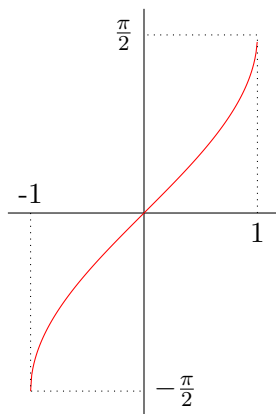


FIGURE 1. Le graphe de la fonction arcsinus

*Démonstration.* Tout découle du théorème de la bijection. Pour la dérivabilité, observons que la dérivée de sinus s'annule aux points  $\pm\pi/2$ , et en aucun autre point de  $I$ . Comme  $\sin(\pm\pi/2) = \pm 1$ , cela prouve que arcsin est dérivable sur  $] -1, 1[$ . La formule donne pour tout  $x \in ] -1, 1[$  :

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

On peut observer que  $\arcsin(x)$  est dans  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , donc  $\cos(\arcsin(x)) > 0$ . Cela permet d'écrire

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{(\cos(\arcsin(x)))^2} = \sqrt{1 - (\sin(\arcsin(x)))^2} = \sqrt{1 - x^2}.$$

D'où la formule pour la dérivée.  $\diamond$

REMARQUE 26. *Attention au domaine de définition !* Par définition d'une réciproque, on dispose bien sûr des formules :

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1, 1], \quad \sin(\arcsin(x)) &= x, \\ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \arcsin(\sin(x)) &= x. \end{aligned}$$

Ces formules sont-elles vraies pour un réel  $x$  quelconque ? Déjà, si  $x$  n'est pas dans  $[-1, 1]$ ,  $\arcsin(x)$  n'est pas défini, donc la première formule n'a aucun sens. Et la seconde ? L'expression  $\arcsin(\sin(x))$  a un sens pour tout réel  $x$  puisque la fonction sinus est définie sur  $\mathbb{R}$  et prend ses valeurs dans  $[-1, 1]$ , où la fonction arcsinus est définie. La seconde formule est donc diablement tentante... mais fausse. En effet,  $\arcsin(\sin(x))$  est toujours dans  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  ; si on prend  $x$  en dehors de cet intervalle, la formule est forcément fausse.

### Énoncé indispensable 15 : arccosinus

La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur l'intervalle  $I = [0, \pi]$ . Elle y prend toutes les valeurs de l'intervalle  $J = [-1, 1]$ . C'est donc une bijection entre  $I$  et  $J$  et on peut définir une fonction réciproque, appelée *arccosinus* :

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi].$$

Pour  $x \in [-1, 1]$ ,  $\arccos(x)$  est l'unique angle compris entre 0 et  $\pi$  dont le cosinus est  $x$ .

La fonction arccosinus est strictement décroissante et continue sur  $[-1, 1]$ . Elle est dérivable sur  $] -1, 1[$ , avec

$$\forall x \in ] -1, 1[, \quad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

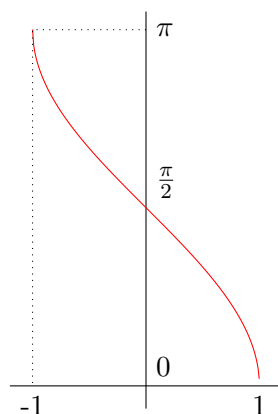


FIGURE 2. Le graphe de la fonction arccosinus

*Démonstration.* C'est totalement similaire au cas de sinus. Le signe - dans la formule vient simplement de  $\cos' = -\sin$  (versus  $\sin' = \cos$ ).  $\diamond$

### Énoncé indispensable 16 : arctangente

La fonction tangente est continue et strictement croissante sur l'intervalle  $I = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . Elle y prend toutes les valeurs de l'intervalle  $J = \mathbb{R}$ . On peut donc définir une fonction réciproque, appelée *arctangente* :

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\arctan(x)$  est l'unique angle compris entre  $-\pi/2$  et  $\pi/2$  dont la tangente est  $x$ . En outre,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

La fonction arctangente est strictement croissante et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

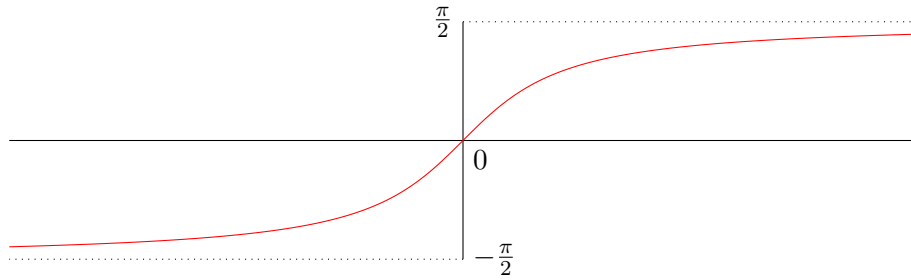


FIGURE 3. Le graphe de la fonction arctangente

*Démonstration.* La fonction arctangente est bien définie par le théorème de la bijection. Comme la fonction tangente tend vers  $\pm\infty$  en  $\pm\pi/2$ , l'intervalle  $J$  est bien  $\mathbb{R}$  et cela donne les limites indiquées. Pour la dérivabilité, on observe que  $\tan' = 1 + \tan^2$  ne s'annule pas. Et la formule de dérivation donne pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan(\arctan(x))^2} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

◇

### 3. Suites récurrentes

Dans cette partie, on s'intéresse aux suites définies par récurrence, comme évoquées dans la partie 1. On va se concentrer sur le cas réel afin de tirer parti de notre étude des fonctions continues/dérivables sur des intervalles de  $\mathbb{R}$ . On travaillera donc avec une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , dont le domaine de définition  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Les suites  $(u_n)$  qu'on considérera seront définies par leur premier terme  $u_0$  et une relation de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n),$$

vérifiée pour tout indice  $n$ .

Par exemple, en prenant pour fonction  $f : x \mapsto \lambda x$ , avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on obtient exactement les suites géométriques de raison  $\lambda$ . En prenant  $f$  affine (i.e.  $f : x \mapsto ax + b$ ), on obtient les suites arithmético-géométriques.

Nous allons donner des réponses générales à quelques questions naturelles. La suite  $(u_n)$  est-elle bien définie ? Par exemple, si on prend  $u_0$  dans  $I$ , la fonction  $f$  est certes définie en  $u_0$ , mais pas forcément en  $u_1 = f(u_0)$ , ce qui empêche de définir le terme  $u_2$ ... Peut-on visualiser le comportement de la suite  $(u_n)$  à l'aide du graphe de  $f$  ? Quelles propriétés de la fonction  $f$  peuvent garantir que la suite  $(u_n)$  est monotone ? Qu'elle converge ? Vers quelle limite ?

**3.1. Bien définie ?** Pour éviter le gag évoqué ci-dessus, on va imposer que, si  $f$  est bien définie en  $x$ , alors  $f$  est encore bien définie en  $f(x)$ .

DEFINITION 12. Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ . On dit que  $I$  est stable ou stabilisé par  $f$  si

$$\forall x \in I, \quad f(x) \in I.$$

EXEMPLE 16. L'intervalle  $[0, +\infty[$  est stabilisé par la fonction  $x \mapsto x^2$ , alors que l'intervalle  $] -\infty, 0]$  ne l'est pas.

PROPOSITION 14. Soit  $I$  un intervalle stabilisé par une fonction  $f$ . Si  $u_0$  est un point de  $I$ , alors la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

définit une suite  $(u_n)$ . De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  est dans  $I$ .

*Démonstration.* On démontre par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  la propriété

$$P_n : \quad u_n \text{ est bien défini et se trouve dans } I.$$

Initialisation : par hypothèse,  $u_0 \in I$ . Hérédité. Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $P_n$  est vraie. Puisque  $u_n$  est dans  $I$ , où  $f$  est bien définie,  $u_{n+1} = f(u_n)$  est bien défini. Puisque  $I$  est stabilisé par  $f$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$  est dans  $I$ , ce qui prouve  $P_{n+1}$ .  $\diamond$

À partir de maintenant, on se donne un intervalle  $I$  stabilisé par  $f$ , ainsi que  $u_0 \in I$ . Et on note  $(u_n)$  la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$



**3.2. Représentation graphique.** On note  $\mathcal{G}$  le graphe de la fonction  $f$ ,  $\mathcal{D}$  la droite d'équation  $y = x$  (appelée la première bissectrice). On peut représenter graphiquement les termes successifs de la suite  $(u_n)$ , de la façon suivante.

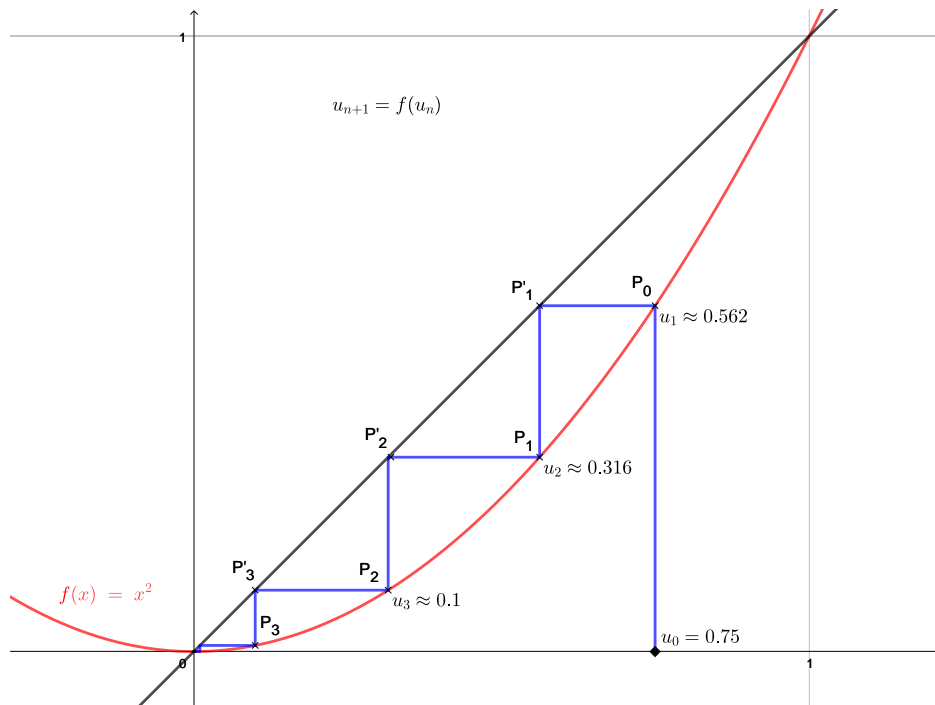
On commence par placer le point  $P_0$  d'abscisse  $u_0$  sur la courbe  $\mathcal{G}$ . Par définition, ses coordonnées sont  $(u_0, u_1)$ .

Ensuite, pour  $n \geq 0$ , on itère les deux étapes suivantes.

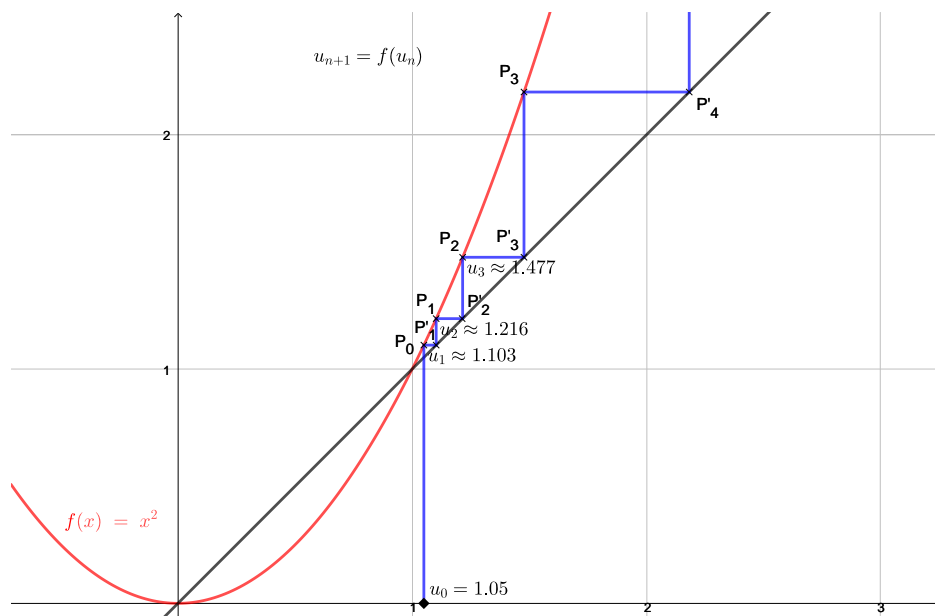
- (1) On trace le segment horizontal reliant  $P_n$  à la droite  $\mathcal{D}$ , et on note  $P'_{n+1}$  le point de  $\mathcal{D}$  ainsi obtenu. Ses coordonnées sont  $(u_{n+1}, u_{n+1})$ .
- (2) On trace le segment vertical reliant  $P'_{n+1}$  à la courbe  $\mathcal{G}$ , et on note  $P_{n+1}$  le point de  $\mathcal{G}$  ainsi obtenu. Ses coordonnées sont  $(u_{n+1}, u_{n+2})$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , le terme  $u_n$  de la suite est donc l'abscisse du point  $P_n$  du graphe  $\mathcal{G}$  de  $f$ . Les exemples suivants montrent des comportements typiques.

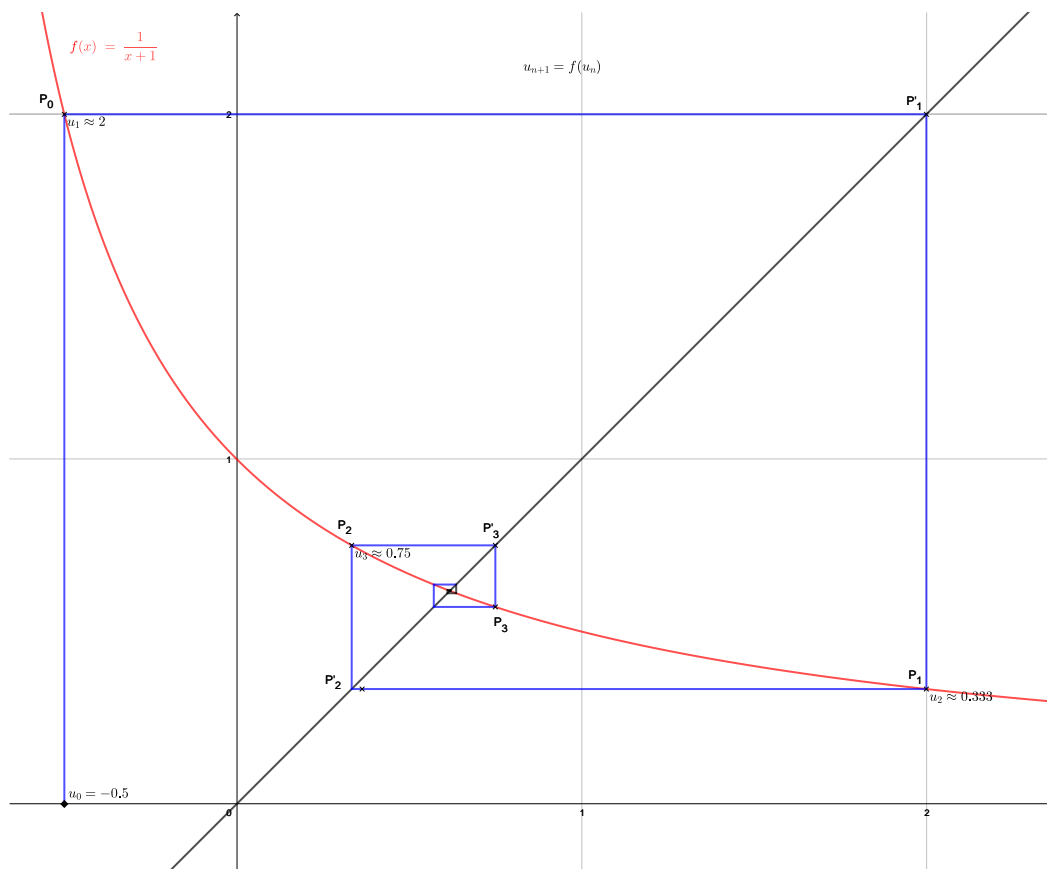
EXEMPLE 17. On considère la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2$ . Le premier dessin correspond à  $u_0 = \frac{3}{4} = 0,75$ .



Le second dessin correspond à  $u_0 = 1,05$ .



EXEMPLE 18. On considère la fonction  $f : ]-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ , avec  $u_0 = \frac{1}{2}$ .



**3.3. Sens de variation.** Nous allons énoncer deux résultats prédisant une forme de monotonie pour la suite récurrente  $(u_n)$ . Ils font des hypothèses différentes sur la fonction  $f$  : le premier demande que son graphe reste soit au-dessus, soit au-dessous de la première bissectrice ; le second traite du cas où la fonction  $f$  elle-même est monotone.

PROPOSITION 15.

- (1) Si pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \geq x$ , alors  $(u_n)$  est croissante.
- (2) Si pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \leq x$ , alors  $(u_n)$  est décroissante.

*Démonstration.* On suppose que pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \geq x$  (resp.  $f(x) > x$ ). Alors, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n$  (resp.  $u_{n+1} = f(u_n) > u_n$ ), d'où le premier point. Le second est similaire.  $\diamond$

On peut aussi obtenir de la stricte monotonie. Par exemple, si le graphe de  $f$  est strictement au-dessus de la première bissectrice ( $f(x) > x$ ), on voit de même que  $(u_n)$  est strictement croissante.

Les dessins tracés au début de ce chapitre illustrent bien cette première proposition. Ils annoncent aussi que le lien entre le sens de variation de  $f$  et celui de  $(u_n)$  est plus subtil.

PROPOSITION 16.

- (1) Si  $f$  est croissante sur  $I$ , alors  $(u_n)$  est monotone ; elle est croissante sur  $u_1 \geq u_0$ , décroissante si  $u_1 \leq u_0$ .
- (2) Si  $f$  est décroissante sur  $I$ , alors les sous-suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont monotones de sens contraires.

*Démonstration.*

- (1) On raisonne par récurrence sur  $n$ . Supposons que  $u_1 \geq u_0$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $u_{n+1} \geq u_n$ . Puisque  $f$  est croissante, on en déduit que  $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$ , ce qui se réécrit  $u_{n+2} \geq u_{n+1}$ . Le principe de récurrence assure donc que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} \geq u_n$ , donc la suite  $(u_n)$  est croissante. Le second cas est exactement similaire.
- (2) Puisque  $f$  est décroissante, la fonction  $f \circ f$  est croissante (si  $x \leq y$ ,  $f(x) \geq f(y)$ , puis  $f(f(x)) \leq f(f(y))$ ). Or la suite  $(u_{2n})$  vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})),$$

donc c'est une suite récurrente associée à la fonction croissante  $f \circ f$ . Par le point (1), la suite  $(u_{2n})$  est monotone. La suite  $(u_{2n+1})$  est aussi une suite récurrente associée à la fonction croissante  $f \circ f$ , donc elle est aussi monotone. Si on suppose par exemple  $(u_{2n})$  croissante, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{2n+2} \geq u_{2n}$$

donc en appliquant la fonction décroissante  $f$ , on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) \leq f(u_{2n}) = u_{2n+1},$$

ce qui montre que la suite  $(u_{2n+1})$  est décroissante. Le cas où  $(u_{2n})$  est décroissante est similaire.  $\diamond$

**3.4. Convergence et points fixes.** Dans ce paragraphe, on cherche à comprendre la convergence de la suite récurrente  $(u_n)$  en termes des propriétés de la fonction  $f$ .

D'abord, quelles sont les limites possibles ? L'énoncé suivant donne une réponse générale quand l'intervalle stable  $I$  est un *intervalle fermé*, c'est-à-dire de la forme  $[a, b]$ , ou  $] - \infty, b]$  ou  $[a, +\infty[$  ou  $] - \infty, +\infty[$ .

**Énoncé indispensable 17 : limites possibles**

On suppose que la fonction  $f$  est continue sur un intervalle  $I$ , stable et fermé, et que la suite récurrente  $(u_n)$  converge vers une limite  $\ell$ . Alors  $\ell$  est dans  $I$  et c'est un *point fixe* de  $f$  :  $f(\ell) = \ell$ .

*Démonstration.* Comme  $I$  est fermé, il est défini par des inégalités larges (c'est l'ensemble des réels  $x$  vérifiant  $x \geq a$  et/ou  $x \leq b$ , ou rien du tout). Puisqu'il est stable, tous les termes  $u_n$  de la suite vérifient ces inégalités larges. En passant à la limite, on voit que  $\ell$  les vérifie aussi :  $\ell \in I$ .

Ensuite, la fonction  $f$  est continue en  $I$ , donc la caractérisation séquentielle de la continuité (proposition 8) assure que  $(f(u_n))$  converge vers  $f(\ell)$ . Or par définition la suite  $(f(u_n))$  est la sous-suite  $(u_{n+1})$  de  $(u_n)$ , donc cette suite converge aussi vers  $\ell$ . Par unicité de la limite, on a donc  $f(\ell) = \ell$ .  $\diamond$

En pratique, pour trouver les limites possibles d'une suite récurrente, on cherche donc les points fixes de la fonction  $f$ . Il est bon de savoir qu'il y en a toujours dans le cas où l'intervalle stable  $I$  est fermé *et borné*, i.e. de la forme  $[a, b]$ .

**PROPOSITION 17.** *On suppose que la fonction  $f$  est continue sur un intervalle stable de la forme  $I = [a, b]$ . Alors  $f$  possède au moins un point fixe.*

*Démonstration.* On considère la fonction continue  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $g(x) = f(x) - x$ . Puisque  $I = [a, b]$  est stable, tous ses éléments  $x$  vérifient  $a \leq f(x) \leq b$ . En prenant  $x = a$  puis  $x = b$ , on obtient  $g(a) = f(a) - a \geq 0$  et  $g(b) = f(b) - b \leq 0$ . Le théorème des valeurs intermédiaires (théorème 7) assure alors que  $g$  s'annule : il existe  $x \in I$  tel que  $g(x) = 0$ , ce qui signifie exactement que  $x$  est un point fixe de  $f$ .  $\diamond$

Considérons maintenant l'exemple suivant.

**EXEMPLE 19.** On considère la fonction continue  $f : x \mapsto x^2$  sur l'intervalle  $I = [0, 1]$ . On voit que  $I$  est stable et fermé, et que  $f$  admet exactement deux points fixes sur  $I$ , à savoir 0 et 1. La proposition 15 assure que la suite récurrente  $(u_n)$  est décroissante. Puisque  $(u_n)$  est minorée par 0, elle converge vers une limite  $l$ , qui est 0 ou 1 par la proposition 17. Si on part de  $u_0 = 1$ , la suite  $(u_n)$  est constante à la valeur 1 (puisque c'est un point fixe) ; en particulier, elle converge vers 1. Si on choisit plutôt  $u_0 \in [0, 1[$ , la décroissance de la suite l'empêche de converger vers 1 : c'est donc qu'elle converge vers 0 (voir aussi les dessins au début de ce chapitre).

Il semble donc que les deux points fixes de  $f$  ne jouent pas un rôle symétrique : 1 a tendance à repousser les termes de la suite (sauf si on part exactement de 1), alors que 0 a tendance à les attirer. Les résultats qui suivent vont expliquer ce comportement.

Nous allons faire des hypothèses supplémentaires de régularité sur la fonction  $f$ . Si  $k$  est un entier naturel, on dira que  $f$  est de classe  $C^k$  si  $f$  est  $k$  fois dérivable de dérivée  $k$ -ième continue. Cela revient à dire que les dérivées successives  $f', (f')' = f'', \dots, f^{(k)}$  existent et sont continues.

**PROPOSITION 18.** *On suppose que  $f$  est de classe  $C^1$  sur l'intervalle stable  $I$  et que  $\ell \in I$  est un point fixe de  $f$  tel que  $|f'(\ell)| > 1$ . Dans ce cas, si la suite récurrente  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ , elle y est forcément stationnaire : il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $u_n = \ell$ .*

*Démonstration.* Puisque  $|f'(\ell)| > 1$ , la continuité de  $|f'|$  donne un réel  $\eta > 0$  tel que  $|f'| \geq 1$  sur l'intervalle  $J = I \cap ]\ell - \eta, \ell + \eta[$ .

Puisque la suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ , il existe un rang  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $|u_n - \ell| < \eta$ . Comme l'intervalle  $I$  est stable, on en déduit que pour tout  $n \geq N$ ,  $u_n$  est dans  $J$ .

On va maintenant montrer que la suite est constante à partir de ce rang  $N$ . Pour  $n \geq N$ , observons que l'égalité des accroissements finis donne un point  $c_n$  entre  $\ell$  et  $u_n$  tel que

$$f(u_n) - f(\ell) = (u_n - \ell)f'(c_n).$$

Par hypothèse, le membre de gauche n'est autre que  $u_{n+1} - \ell$ . Par ailleurs, le point  $c_n$  est entre les points  $\ell$  et  $u_n$  de l'intervalle  $J$ , donc  $c_n$  est aussi dans  $J$  :  $|f'(c_n)| \geq 1$ . On en déduit :

$$|u_{n+1} - \ell| \geq |u_n - \ell|.$$

Donc, par récurrence immédiate, pour tout  $n \geq N$  et tout  $p \in \mathbb{N}$  :

$$|u_{n+p} - \ell| \geq |u_n - \ell|.$$

Fixons  $n \geq N$  et faisons tendre  $p$  tend vers  $+\infty$  : par convergence de la suite vers  $\ell$ , on trouve  $0 \geq |u_n - \ell|$ , i.e.  $u_n = \ell$ , et ce pour tout  $n \geq N$ .  $\diamond$

C'est un résultat négatif : sauf si par chance la suite tombe exactement sur le point fixe  $\ell$  au bout d'un nombre fini d'itérations, elle ne peut pas converger vers  $\ell$ . La preuve montre même que si la suite passe près de  $\ell$ , sans y être tout à fait, elle va s'en éloigner. Ce point fixe est dit *répulsif*.

On cherche maintenant à trouver un critère positif, permettant de conclure que la suite récurrente converge vers une limite bien identifiée. On peut s'inspirer du cas des suites géométriques : ce sont les suites récurrentes  $(u_n)$  associées à des fonctions du type  $f_a : x \mapsto ax$ , pour une constante  $a \in \mathbb{R}$ . Ce sont des suites explicites :  $u_n = a^n u_0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $|a| > 1$ , la suite diverge, sauf si on part de  $u_0 = 0$  (auquel cas elle reste nulle) : c'est la situation de la proposition précédente, le point fixe 0 de  $f_a$  est répulsif. Dans le cas  $|a| < 1$ , par contre, la suite converge toujours vers le point fixe 0 de  $f_a$  : ce point fixe est attractif, il attire toutes les suites récurrentes associée à  $f_a$ . On va généraliser cette situation.

DEFINITION 13. Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est dite *contractante* s'il existe  $k \in [0, 1[$  tel que, pour tout  $x, y \in I$ ,

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Parfois, pour préciser la valeur de la constante  $k$ , on dit que  $f$  est  $k$ -contractante.

**Test : propriétés des fonctions contractantes**

- Prouver qu'une fonction contractante est continue.
- Prouver qu'une fonction contractante admet au plus un point fixe.

Le critère suivant est très utile pour montrer qu'une fonction est contractante.

PROPOSITION 19. Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  telle que  $\sup_I |f'| < 1$ . Alors  $f$  est contractante.

Démonstration. Notons  $k = \sup_I |f'|$ . Alors  $k < 1$  par hypothèse, et l'inégalité des accroissements finis dit que  $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$  pour tous  $x, y \in I$ .  $\diamond$

REMARQUE 27. Si  $f$  est de classe  $C^1$  sur un segment  $[a, b]$ , le théorème des bornes atteintes assure que l'hypothèse  $\sup_{x \in I} |f'(x)| < 1$  équivaut à l'hypothèse :

$$\text{pour tout } x \in I, |f'(x)| < 1.$$

Attention, ce n'est pas vrai sans ces hypothèses !

REMARQUE 28. Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur un intervalle stable  $I$  contenant un point  $\ell$  tel que  $f(\ell) = \ell$  et  $|f'(\ell)| < 1$ . Soit  $k$  un réel tel que  $|f'(\ell)| < k < 1$ . Par continuité de  $f'$ , il existe  $\eta > 0$  tel que  $|f'| \leq k$  sur l'intervalle  $J = I \cap ]\ell - \eta, \ell + \eta[$ . Alors  $f$  est contractante sur l'intervalle  $J$ . On peut noter que l'intervalle  $J$  est lui-même stable : si  $x \in J$ ,  $|f(x) - f(\ell)| \leq k|x - \ell| \leq \eta$  ; puisque  $f(\ell) = \ell$ , cela veut dire que  $f(x)$  est dans  $]\ell - \eta, \ell + \eta[$ , donc dans  $J$  ( $I$  étant supposé stable).

**Énoncé indispensable 18 : théorème du point fixe contractant**

On suppose que  $f$  est une fonction  $k$ -contractante sur un intervalle stable  $I$ , contenant un point fixe  $\ell$ . Alors la suite récurrente  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ . De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|.$$

Outre le résultat de convergence, on remarquera l'inégalité, qui mesure la vitesse de convergence. C'est un aspect important quand on veut évaluer numériquement la limite en calculant les termes successifs de la suite. Dans ce cas, la suite tend vers sa limite au moins aussi vite qu'une suite géométrique de raison  $k$ . C'est assez rapide, d'autant plus rapide que  $k$  est petit.

*Démonstration.* On prouve l'inégalité par récurrence sur  $n$ . Elle est immédiate pour  $n = 0$ . Et si elle est vraie au rang  $n$ , on peut écrire

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq k|u_n - \ell| \leq k \cdot k^n |u_0 - \ell|,$$

ce qui prouve l'inégalité au rang  $n + 1$ .

Ceci montre que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$ . Puisque  $0 \leq k < 1$ , la suite  $(k^n)$  converge vers 0. On en déduit que  $|u_n - \ell|$  tend vers 0 : la suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ .  $\diamond$

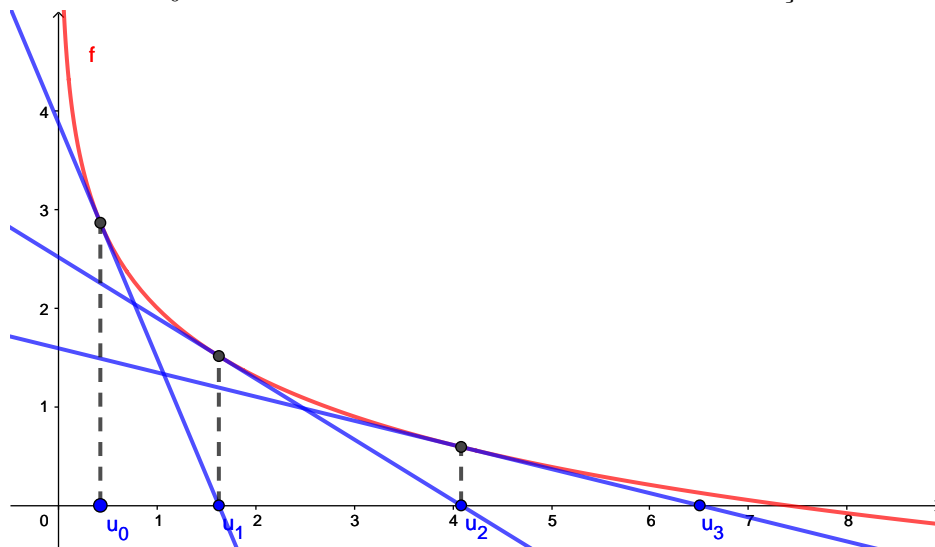
EXEMPLE 20. Soit  $a$  un réel strictement positif. On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $f(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{a}{x} \right)$ . Alors  $f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$ . En outre,  $f$  est de classe  $C^1$  et pour tout  $x \in I$ ,  $f'(x) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{a}{x^2} \right)$ . On voit donc que  $f$  est  $\frac{1}{2}$ -contractante sur l'intervalle  $I = [\sqrt{a}, +\infty[$  et on peut vérifier que cet intervalle est stable (puisque  $(A - B)^2 \geq 0$ , on a  $A^2 + B^2 \geq 2AB$  pour tous réels  $A$  et  $B$  : prendre ici  $A = \sqrt{x}$  et  $B = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$ ). Donc le théorème assure que la suite  $(u_n)$ , définie par  $u_0 \in I$  quelconque et  $u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{a}{u_n} \right)$ , converge vers  $\sqrt{a}$  à une vitesse exponentielle.

Cela fournit un algorithme efficace pour calculer des valeurs approchées de la racine carrée d'un nombre réel positif. Par exemple, si  $a = 2$  et  $u_0 = 2$ , on obtient  $u_1 = 1,5$ ,  $u_2 = 1,41 \dots$ ,  $u_3 = 1,41421 \dots$ ,  $u_4 = 1,41421356237 \dots$ ,  $u_5 = 1,414213562373095048801688 \dots$ , où les décimales écrites avant les points de suspension sont exactes. On voit donc que le nombre de décimales exactes semble doubler à chaque itération (ce qui est encore meilleur que l'estimation donnée par le théorème : cf. TD).

La *méthode de Newton* est une technique générale permettant d'appliquer le théorème du point fixe contractant pour calculer des solutions approchées d'équations de la forme

$$F(x) = 0,$$

où  $F$  est une fonction de classe  $C^2$  sur un intervalle ouvert  $I$ . Pour ce faire, on se donne  $u_0 \in I$  et on construit une suite récurrente de la façon suivante :



Géométriquement, si  $u_n$  est construit, on trace la tangente au graphe de  $F$  au point de coordonnées  $(u_n, F(u_n))$ , et on note  $u_{n+1}$  l'abscisse du point d'intersection entre la tangente et l'axe des abscisses.

On voit vite qu'il peut y avoir un souci si la tangente qu'on trace est horizontale, donc ne rencontre pas l'axe des abscisses. Mais passons là-dessus pour le moment.

Algébriquement, l'équation de la tangente au graphe au point de coordonnées  $(u_n, F(u_n))$  s'écrit :  $y = F(u_n) + F'(u_n)(x - u_n)$ . L'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses est le point de coordonnées  $(u_{n+1}, 0)$  vérifiant  $0 = F(u_n) + F'(u_n)(u_{n+1} - u_n)$ , i.e.

$$(1) \quad u_{n+1} = u_n - \frac{F(u_n)}{F'(u_n)}.$$

Par conséquent, la suite  $(u_n)$  est définie par  $u_0 \in I$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ , où la fonction  $f$  est donnée par

$$f(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)}.$$

La fonction  $f$  est continue là où elle est définie. Si la suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ , ce sera donc un point fixe de  $f$  :  $f(\ell) = \ell$ . La formule donnant  $f$  montre alors que  $F(\ell) = 0$ . Donc la limite  $\ell$  sera bien une solution du problème considéré.

Reste à assurer que la suite  $(u_n)$  est bien définie et converge, ce qui n'est pas garanti a priori. Manifestement, au vu de la formule donnant  $f$ , il peut y avoir un problème si  $F'$  s'annule (c'est-à-dire là où la tangente est horizontale). Pour ne pas tomber dans ce piège, on va supposer que l'équation  $F(x) = 0$  admet une solution pour laquelle  $F'$  ne s'annule pas, et aussi que la suite est initialisée assez près de cette solution.

**PROPOSITION 20.** *Soit  $\ell \in I$  tel que  $F(\ell) = 0$  et  $F'(\ell) \neq 0$ . Alors pour tout  $u_0 \in I$  suffisamment proche de  $\ell$ , la suite  $(u_n)$  est bien définie et converge vers  $\ell$ .*

*Démonstration.* Puisque  $F(\ell) = 0$ , on a  $f(\ell) = \ell$ . Comme  $F$  est de classe  $C^2$  et  $F'(\ell) \neq 0$ , la fonction  $f$  est de classe  $C^1$  au voisinage de  $\ell$ , et on a

$$f'(\ell) = 1 - \frac{F'(\ell)^2 - F(\ell)F''(\ell)}{F'(\ell)^2} = 0.$$

En particulier,  $|f'(\ell)| < 1$ . On peut donc utiliser la remarque 28 pour trouver un intervalle stable  $J$  autour de  $\ell$  sur lequel  $f$  est contractante.

On peut alors appliquer le théorème du point fixe contractant sur cet intervalle : pour tout  $u_0 \in J$ , la suite  $(u_n)$  est bien définie et elle converge vers  $\ell$ .  $\diamond$

**EXEMPLE 21.** Soient  $a \in \mathbb{R}_+^*$  et  $I = \mathbb{R}_+^*$ . On considère la fonction  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $F(x) = x^2 - a$ . La méthode de Newton consiste à regarder la suite  $(u_n)$  définie par  $u_{n+1} = f(u_n)$ , avec  $f : I \rightarrow I$  définie par  $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$ . La proposition 20 assure alors que  $(u_n)$  converge vers  $\sqrt{a}$  si  $u_0$  est suffisamment proche de  $\sqrt{a}$ . On retrouve donc exactement l'exemple 20 comme cas particulier de la méthode de Newton.



## 4. Intégration

**4.1. Introduction.** Commençons par un rappel. Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Une primitive de  $f$  est une fonction  $F$  dérivable sur  $I$ , de dérivée  $F' = f$ .

Une notion d'intégrale a été introduite au premier semestre, à l'aide des primitives. Si  $F$  est une primitive de  $f$ , on pose pour tous réels  $\alpha$  et  $\beta$  de  $I$  :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) \, dt = F(\beta) - F(\alpha).$$

Puisque toute autre primitive  $G$  de  $f$  s'écrit  $G = F + c$  pour une constante  $c$ , la différence  $G(\beta) - G(\alpha)$  vaudra aussi  $F(\beta) - F(\alpha)$  et donc l'intégrale, définie ainsi, ne dépend pas du choix de la primitive.

Les propriétés classiques de la dérivation (dérivée d'une somme, d'un produit, d'une composée, lien entre monotonie et signe de la dérivée) confèrent à cette intégrale des propriétés calculatoires riches : relation de Chasles, linéarité, positivité, intégration par parties, changement de variable... Nous renvoyons le lecteur aux cours du premier semestre pour les énoncés et aux travaux dirigés pour des révisions.

Dans ce cours, on présente un cadre théorique *qui recouvre ce cas de l'intégrale définie par la primitive*. En particulier on démontrera que les fonctions continues admettent une primitive (théorème admis au premier semestre) et on définira l'intégrale de fonctions plus générales, non nécessairement continues. L'idée générale est que l'intégrale d'une fonction positive doit être « l'aire sous la courbe », si on donne un sens à cette expression, ce qui n'est pas toujours facile. Qu'est-ce qu'une aire ? Si la fonction qu'on regarde est assez gentille, son graphe sera raisonnable et on va voir une construction qui donne une sorte de formule pour l'aire sous le graphe, par un procédé d'approximation. Mais il est bon de garder à l'esprit qu'il existe des fonctions suffisamment vilaines pour qu'on n'arrive pas du tout à définir l'aire sous leur graphe.

Nous concluons ce chapitre par la preuve de quelques formules utiles – notamment les formules de Taylor – et par quelques idées autour de l'approximation numérique des intégrales.

**4.2. Intégrale des fonctions en escalier.** Pour définir l'intégrale des fonctions continues sur un intervalle borné  $[a, b]$ , on va passer par les fonctions en escalier, qui ne sont pas continues en général : essentiellement on va casser  $[a, b]$  en plusieurs intervalles et regarder les fonctions qui sont constantes sur chacune de ces petits intervalles. L'avantage de ces fonctions, c'est la simplicité géométrique de leur graphe : « l'aire sous la courbe » est une notion très claire pour une fonction en escalier.

**DEFINITION 14.** Une *subdivision*  $\sigma$  de  $[a, b]$  est un ensemble fini de  $[a, b]$  contenant  $a$  et  $b$ . On notera  $\sigma = \{x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n\}$ , avec  $x_0 = a$  et  $x_n = b$ . Le pas  $|\sigma|$  est l'écart maximal entre deux points successifs de la subdivision :

$$|\sigma| = \max\{x_i - x_{i-1}, \mid i = 1, 2, \dots, n\}.$$

**EXEMPLE 22.** L'exemple typique de subdivision est celui où cet écart est constant :  $x_{i+1} - x_i = |\sigma| = \frac{b-a}{n}$  pour tout  $i$ . Cela revient à dire que

$x_i = a + i \frac{b-a}{n}$  pour  $i = 0, \dots, n$ . On dit alors que  $\sigma$  est une subdivision régulière.

On dira que la subdivision  $\sigma'$  est plus fine que la subdivision  $\sigma$  si  $\sigma \subset \sigma'$  : on a plus de points dans la subdivision  $\sigma'$ , chaque intervalle  $]x'_{i-1}, x'_i[$  délimité par  $\sigma'$  et inclus dans un intervalle délimité par  $\sigma$  et les pas vérifient  $|\sigma'| \leq |\sigma|$ . De façon générale, la réunion  $\sigma \cup \tau$  des deux subdivisions  $\sigma$  et  $\tau$  est une subdivision plus fine que les deux subdivisions d'origine.

DEFINITION 15. Une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est dite *en escalier* s'il existe une subdivision  $\sigma = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$  de  $[a, b]$  telle que  $f$  est constante sur chacun des intervalles ouverts  $]x_{i-1}, x_i[$  pour  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

On notera  $\mathcal{E}$  ou  $\mathcal{E}([a, b])$  l'ensemble des fonctions en escalier sur  $[a, b]$  et on dira que la subdivision  $\sigma$  est adaptée à la fonction en escalier  $f$ , ou bien que  $f$  est associée à la subdivision  $\sigma$ . Dans cette définition, on peut remarquer que les valeurs prises par la fonction aux points  $x_i$  sont complètement libres : on n'y impose rien.

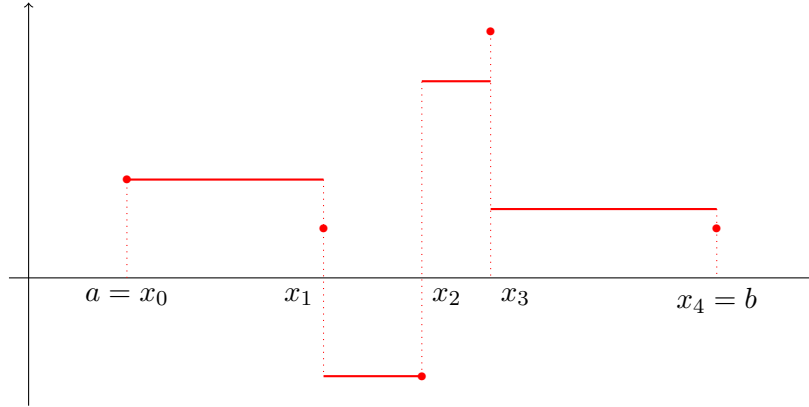


FIGURE 4. Une fonction en escalier

Il est utile d'introduire la fonction indicatrice  $\chi_X$  d'une partie  $X$  de  $\mathbb{R}$  : c'est par définition la fonction qui vérifie

$$\chi_X(x) = 1 \text{ si } x \in X \quad \text{et} \quad \chi_X(x) = 0 \text{ si } x \notin X.$$

Les fonctions indicatrices permettent de bâtir des exemples de fonctions en escalier :  $\chi_{[0,1]}$  ou  $3\chi_{[1,2]} - \chi_{[2,3]} + 17\chi_{\{5\}}$  sont des fonctions en escalier sur  $[0, 10]$ , associées à la subdivision  $\{0, 1, 2, 3, 5, 10\}$ .

De façon générale, considérons une fonction en escalier  $f$  associée à une subdivision  $\sigma = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$ . Pour  $i = 1, \dots, n$ , on définit les milieux  $m_i = (x_{i-1} + x_i)/2$  des intervalles  $]x_{i-1}, x_i[$  et ainsi une nouvelle fonction en escalier

$$g = \sum_{i=1}^n f(m_i) \chi_{]x_{i-1}, x_i]}.$$

Alors les fonctions  $f$  et  $g$  prennent des valeurs identiques sur les intervalles  $]x_{i-1}, x_i[$  pour  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

En particulier, le graphe d'une fonction en escalier, avec l'axe des abscisses, permet de délimiter un nombre fini de rectangles de la forme, pour  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  :  $[x_{i-1}, x_i] \times [0, f(m_i)]$  si  $f(m_i) \geq 0$  ou  $[x_{i-1}, x_i] \times [f(m_i), 0]$  si  $f(m_i) \leq 0$  ; ces rectangles sont situés soit au-dessus de l'axe des abscisses, soit au-dessous.

DEFINITION 16. L'intégrale d'une fonction en escalier est définie comme la différence entre, d'une part, la somme des aires des rectangles délimités par la fonction en escalier qui sont situés au-dessus de l'axe des abscisses et, d'autre part, la somme des aires des rectangles qui sont situés au-dessous de cet axe. Autrement dit, si  $f$  est une fonction en escalier associée à la subdivision  $\sigma = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$  de  $[a, b]$ , c'est la quantité

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(m_i),$$

où  $m_i = (x_{i-1} + x_i)/2$ , pour  $i = 1, \dots, n$ .

C'est donc l'aire sous la courbe si la fonction en escalier est à valeurs positives. Sinon, c'est une aire « algébrique » : on compte positivement l'aire située au-dessus de l'axe des abscisses et négativement l'aire située au-dessous.

REMARQUE 29. Dans l'égalité précédente, pour tout  $i$ , le point milieu  $m_i = (x_{i-1} + x_i)/2$  de l'intervalle  $]x_{i-1}, x_i[$  peut être remplacé par n'importe quel point  $c_i$  de cet intervalle (puisque  $f$  y est constante). De plus, les valeurs de  $f$  aux points  $x_i$  de la subdivision  $\sigma$  n'interviennent pas. De la sorte, pour la fonction en escalier  $g = \sum_{i=1}^n f(m_i) \chi_{]x_{i-1}, x_i[}$  construite ci-dessus, on a  $\int_a^b f = \int_a^b g$ .

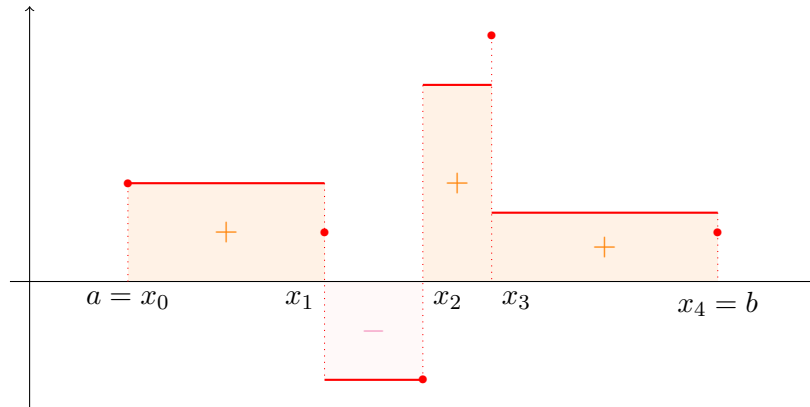


FIGURE 5. L'intégrale de cette fonction en escalier est la différence entre l'aire en orange et l'aire en rose.

Clairement, une fonction en escalier  $f$  peut être associée à plusieurs subdivisions (et même une infinité). Typiquement, si la subdivision  $\sigma$  est adaptée à  $f$ , toute subdivision plus fine  $\sigma'$  l'est aussi : les intervalles qu'elle délimite sont en fait inclus dans ceux de  $\sigma$ , donc  $f$  y est constante. Graphiquement, cela revient à découper parallèlement à l'axe des ordonnées chacun des rectangles en une réunion finie de rectangles.

PROPOSITION 21. *La valeur de  $\int_a^b f$  ne dépend pas de la subdivision adaptée à la fonction en escalier  $f$ .*

*Démonstration.* Soient  $\sigma$  et  $\tau$  deux subdivisions adaptées à  $f$ . Alors la subdivision  $\sigma \cup \tau$  est plus fine que les subdivisions  $\sigma$  et  $\tau$ . En usant de cette construction, il est suffisant de montrer l'égalité de la valeur de l'intégrale calculée à partir de deux subdivisions dont l'une est plus fine que l'autre. Or les rectangles associés au graphe de  $f$  et à la subdivision la plus fine peuvent être réunis pour reconstituer exactement les rectangles associés au graphe de  $f$  pour l'autre subdivision, ce qui, en raisonnant en termes d'aires, permet de conclure.  $\diamond$

### Test : fonction en escalier constante

Montrer qu'une fonction  $f$  qui est constante sur l'intervalle  $[a, b]$  appartient à l'ensemble  $\mathcal{E}$  et calculer son intégrale. Déterminer une primitive  $F$  et montrer l'identité  $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ . Pour tout point  $c \in ]a, b[$ , montrer que l'intégrale de  $f$  quand elle est associée à la subdivision  $\sigma = \{a < c < b\}$  est identique à la valeur obtenue précédemment.

PROPOSITION 22 (propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier). *Soient  $f, g$  des fonctions en escalier sur  $[a, b]$ .*

- (1) (Linéarité) *Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la fonction  $f + \lambda g$  est en escalier et  $\int_a^b (f + \lambda g) = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g$ .*
- (2) (Relation de Chasles) *Pour tout  $c \in ]a, b[$ ,  $f$  se restreint en des fonctions en escalier sur  $[a, c]$  et sur  $[c, b]$  vérifiant :  $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ .*
- (3) (Croissance) *Si  $f \leq g$ ,  $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ .*
- (4) (Lien avec la valeur absolue) *La fonction  $|f|$  est en escalier et vérifie  $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$ .*

*Démonstration.*

- (1) Soient  $\sigma$  et  $\tau$  des subdivisions adaptées respectivement à  $f$  et  $g$ . La subdivision  $\sigma \cup \tau = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$  est plus fine que  $\sigma$  et  $\tau$  donc adaptée à  $f$  et  $g$ . Et on voit que, pour tout indice  $i$ , la fonction  $f + \lambda g$  est constante à la valeur  $f(m_i) + \lambda g(m_i)$  sur l'intervalle  $]x_{i-1}, x_i[$ , en notant  $m_i$  le milieu de cet intervalle. Donc  $f + \lambda g$  est une fonction en escalier et son intégrale vaut par définition

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) (f(m_i) + \lambda g(m_i)),$$

ce qu'on peut développer en

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(m_i) + \lambda \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) g(m_i) = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g.$$

- (2) Soit  $\sigma$  une subdivision de  $[a, b]$  adaptée à  $f$ . Soit  $\tau = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$  la subdivision plus fine (dont adaptée à  $f$ ) obtenue en

ajoutant le point  $c$  à  $\sigma$  : on  $x_k = c$  pour un indice  $k$ . Alors  $f$  est constante sur chaque intervalle  $]x_{i-1}, x_i[$ ,  $\tau_g = \{x_i \mid i \leq k\}$  est une subdivision de  $[a, c]$  et  $\tau_d = \{x_i \mid i \geq k\}$  est une subdivision de  $[c, b]$ . Donc  $f$  est en escalier sur  $[a, c]$  et  $[c, b]$ , avec les formules

$$\int_a^c f = \sum_{i=1}^k (x_i - x_{i-1})f(m_i) \quad \text{et} \quad \int_c^b f = \sum_{i=k+1}^n (x_i - x_{i-1})f(m_i),$$

d'où l'on déduit :

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})f(m_i) = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

(3) Avec les notations utilisées en (1), puisque  $f \leq g$ , on trouve

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})f(m_i) \leq \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})g(m_i) = \int_a^b g.$$

(4) Toujours avec les mêmes notations, la fonction  $|f|$  est constante à la valeur  $|f(m_i)|$  sur chaque intervalle  $]x_{i-1}, x_i[$ , donc c'est une fonction en escalier et son intégrale est  $\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})|f(m_i)|$ . Mais alors, par inégalité triangulaire, on trouve :

$$\left| \int_a^b f \right| = \left| \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})f(m_i) \right| \leq \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})|f(m_i)| = \int_a^b |f|.$$

◇

**4.3. Intégrales inférieure et supérieure.** Dans ce paragraphe, on considère une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  qu'on suppose bornée. On veut définir son intégrale sur  $[a, b]$  en pensant que c'est une « aire algébrique sous la courbe ».

Intuitivement, l'aire d'une figure géométrique peut être calculée en la remplissant le mieux possible par des figures simples (constituées de triangles, rectangles,...), dont on connaît bien l'aire. C'est ainsi qu'Archimède calculait l'aire d'un disque, en l'approchant par des polygones réguliers avec de plus en plus de côtés.

De façon analogue, on peut ici regarder les fonctions en escaliers  $\varphi$  dont le graphe est sous celui de  $f$  :  $\varphi \leq f$ . Chacune de ces fonctions  $\varphi$  a une intégrale, définie par le paragraphe précédent comme une aire algébrique. Une manière de concevoir l'intégrale de  $f$  est de penser que ce doit être la plus grande aire obtenue ainsi. Plus précisément, on définit *l'intégrale inférieure* de  $f$  par une borne supérieure :

$$\mathcal{I}_-^{a,b}(f) = \sup \left\{ \int_a^b \varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}([a, b]), \varphi \leq f \right\}.$$

On parle d'intégrale inférieure parce qu'on approche le graphe de  $f$  par dessous, par des fonctions  $\varphi \leq f$ .

On peut faire une construction similaire en travaillant avec des fonctions en escalier dont le graphe est au-dessus de celui de  $f$  et en regardant la plus

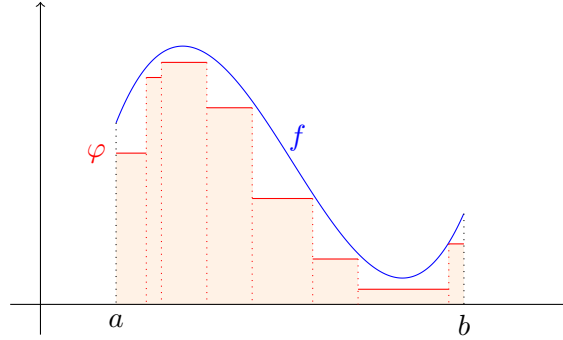


FIGURE 6. Construction de l'intégrale inférieure : c'est la plus grande aire orange qu'on peut obtenir ainsi.

petite aire obtenue. Cela définit l'intégrale supérieure de  $f$  :

$$\mathcal{I}_+^{a,b}(f) = \inf \left\{ \int_a^b \psi \mid \psi \in \mathcal{E}([a, b]), \psi \geq f \right\}.$$

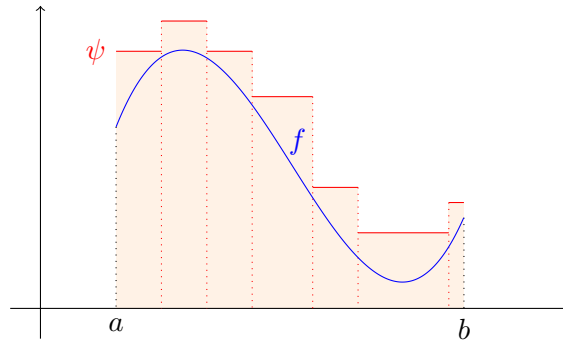


FIGURE 7. Construction de l'intégrale supérieure : c'est la plus petite aire orange qu'on peut obtenir ainsi.

REMARQUE 30. Selon le contexte, pour simplifier la notation, on s'autorisera à abréger  $\mathcal{I}_\pm^{a,b}(f)$  en  $\mathcal{I}_\pm(f)$  ou  $\mathcal{I}_\pm^{a,b}$ .

Les quantités  $\mathcal{I}_+(f)$  et  $\mathcal{I}_-(f)$  sont des réels bien définis pour toute fonction bornée  $f$  sur  $[a, b]$ , comme le montre la proposition suivante. On remarquera que, pour une fonction bornée  $f$ , l'ensemble  $\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$  est une partie bornée de  $\mathbb{R}$ , donc admet une borne supérieure et une borne inférieure dans  $\mathbb{R}$ , notées respectivement :  $M = \sup_{[a,b]} f$  et  $m = \inf_{[a,b]} f$ .

La fonction constante à la valeur  $m$  (resp.  $M$ ) est donc une fonction en escalier inférieure (resp. supérieure) ou égale à  $f$  : on peut l'utiliser pour estimer l'intégrale inférieure (resp. supérieure) de  $f$ .

PROPOSITION 23. On dispose des inégalités :

$$(b-a)m \leq \mathcal{I}_-^{a,b}(f) \leq \mathcal{I}_+^{a,b}(f) \leq (b-a)M.$$

*Démonstration.* Soit  $\varphi_m$  la fonction constante à la valeur  $m$  sur  $[a, b]$ . Alors  $\varphi_m \in \mathcal{E}([a, b])$  et  $\varphi_m \leq f$ . La définition de  $\mathcal{I}_-^{a,b}(f)$  donne alors

$$\int_a^b \varphi_m \leq \mathcal{I}_-^{a,b}(f).$$

Puisque  $\int_a^b \varphi_m = m(b-a)$ , cela donne l'inégalité de gauche.

L'inégalité de droite se démontre de la même façon, en considérant la fonction constante  $\psi_M = M$ , qui vérifie  $\psi_M \geq f$ .

Enfin, pour l'inégalité du milieu, on considère des fonctions en escalier  $\varphi$  et  $\psi$  sur  $[a, b]$  vérifiant  $\varphi \leq f \leq \psi$ . Les propriétés de l'intégrale sur  $\mathcal{E}$  donnent

$$\int_a^b \varphi \leq \int_a^b \psi.$$

En prenant la borne inférieure sur toutes les fonctions  $\psi$  de ce type, on trouve

$$\int_a^b \varphi \leq \mathcal{I}_+^{a,b}(f).$$

En prenant la borne supérieure sur toutes les fonctions  $\varphi$  qui conviennent, on arrive à  $\mathcal{I}_-^{a,b}(f) \leq \mathcal{I}_+^{a,b}(f)$ .  $\diamond$

**4.4. Intégrabilité.** Intuitivement, si on fait un dessin, on sent bien qu'une fonction raisonnable va avoir des intégrales inférieure et supérieure égales. Et cette valeur commune sera l'aire sous la courbe.

**Test : intégrales supérieure et inférieure de  $\varphi$  en escalier**

Pour  $\varphi \in \mathcal{E}([a, b])$  montrer que  $\mathcal{I}_+^{a,b}(\varphi) = \mathcal{I}_-^{a,b}(\varphi) = \int_a^b \varphi$ .

Cette situation n'est pas universelle : il existe des fonctions bornées dont les intégrales inférieures et supérieures diffèrent. Considérons par exemple la fonction indicatrice  $\chi_{\mathbb{Q}}$  de l'ensemble des rationnels :  $\chi_{\mathbb{Q}}(x)$  vaut 1 si  $x$  est rationnel et 0 si  $x$  est irrationnel. On peut voir que, pour cette fonction,  $\mathcal{I}_+^{0,1} = 1$  tandis que  $\mathcal{I}_-^{0,1} = 0$  (exercice!). L'idée est que dans chaque intervalle d'une subdivision de  $[0, 1]$ , il y a un rationnel et un irrationnel ; une fonction en escalier au-dessus (resp. au-dessous) de  $\chi_{\mathbb{Q}}$  a donc ses paliers au-dessus de 1 (resp. au-dessous de 0).

**Énoncé indispensable 19 : intégrabilité**

Soit  $f$  une fonction bornée sur  $[a, b]$ . On dit que  $f$  est *intégrable* sur  $[a, b]$  lorsque  $\mathcal{I}_+^{a,b}(f) = \mathcal{I}_-^{a,b}(f)$ . On note alors  $\int_a^b f$  la valeur commune de  $\mathcal{I}_+^{a,b}(f)$  et  $\mathcal{I}_-^{a,b}(f)$  dans ce cas.

Ce qui précède dit que les fonctions en escaliers sont intégrables, tandis que  $\chi_{\mathbb{Q}}$  n'est pas intégrable sur  $[0, 1]$ .

REMARQUE 31. Par définition des bornes inférieure et supérieure,  $f$  est intégrable si et seulement si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\varphi$  et  $\psi \in \mathcal{E}([a, b])$  vérifiant  $\varphi \leq f \leq \psi$  et  $\int_a^b \psi - \int_a^b \varphi = \int_a^b (\psi - \varphi) \leq \varepsilon$ .

REMARQUE 32. Soit  $f$  une fonction intégrable sur  $[a, b]$ . Soit  $g$  une fonction égale à  $f$ , sauf en un nombre fini de points. Alors  $g$  est intégrable sur  $[a, b]$  et  $\int_a^b g = \int_a^b f$ . C'est parce que l'intégrale d'une fonction en escalier ne change pas quand on la modifie en un nombre fini de points (l'aire algébrique sous la courbe ne change pas) : ainsi, les intégrales inférieure et supérieure de  $f$  et  $g$  sont les mêmes.

Afin de démontrer que les fonctions continues sont bien intégrables, on a besoin d'une relation de Chasles pour les intégrales inférieures et supérieures.

LEMME 2. Soient  $f$  une fonction bornée sur  $[a, b]$  et  $c \in [a, b]$ . Alors :

$$\mathcal{I}_{\pm}^{a,b}(f) = \mathcal{I}_{\pm}^{a,c}(f) + \mathcal{I}_{\pm}^{c,b}(f).$$

Démonstration. Soit  $\varphi \in \mathcal{E}([a, b])$  telle que  $\varphi \leq f$ . Alors  $\varphi$  est en escalier sur  $[a, c]$  et  $[c, b]$ , de sorte que

$$\int_a^c \varphi \leq \mathcal{I}_{-}^{a,c}(f) \quad \text{et} \quad \int_c^b \varphi \leq \mathcal{I}_{-}^{c,b}(f).$$

Par Chasles pour la fonction en escalier  $\varphi$ , on en déduit en sommant :

$$\int_a^b \varphi \leq \mathcal{I}_{-}^{a,c}(f) + \mathcal{I}_{-}^{c,b}(f).$$

En passant à la borne supérieure sur ce type de fonction  $\varphi$ , on arrive à

$$\mathcal{I}_{-}^{a,b}(f) \leq \mathcal{I}_{-}^{a,c}(f) + \mathcal{I}_{-}^{c,b}(f).$$

Pour démontrer l'inégalité opposée, on se donne  $\varphi_1 \in \mathcal{E}([a, c])$  et  $\varphi_2 \in \mathcal{E}([c, b])$  telles que  $\varphi_1 \leq f$  et  $\varphi_2 \leq f$ . On définit alors  $\varphi \in \mathcal{E}([a, b])$  par  $\varphi(x) = \varphi_1(x)$  si  $x \in [a, c]$  et  $\varphi(x) = \varphi_2(x)$  si  $x \in ]c, b]$ . Puisque visiblement  $\varphi \leq f$  sur  $[a, b]$ , on a

$$\int_a^b \varphi \leq \mathcal{I}_{-}^{a,b}(f).$$

Le relation de Chasles pour les fonctions en escalier donne aussi :

$$\int_a^b \varphi = \int_a^c \varphi + \int_c^b \varphi = \int_a^c \varphi_1 + \int_c^b \varphi_2.$$

On en tire

$$\int_a^c \varphi_1 + \int_c^b \varphi_2 \leq \mathcal{I}_{-}^{a,b}(f).$$

En passant à la borne supérieure sur  $\varphi_1$ , puis  $\varphi_2$ , on trouve

$$\mathcal{I}_{-}^{a,c}(f) + \mathcal{I}_{-}^{c,b}(f) \leq \mathcal{I}_{-}^{a,b}(f).$$

Et donc il y a égalité. On procède de même pour les intégrales supérieures.

◇

Ce lemme a une conséquence importante, quoique naturelle, si on le joint à l'inégalité centrale de la proposition 23. Si  $f$  est intégrable sur  $[a, c]$  et sur  $[c, b]$ , alors  $\mathcal{I}_{+}^{a,c} = \mathcal{I}_{-}^{a,c}$  et  $\mathcal{I}_{+}^{c,b} = \mathcal{I}_{-}^{c,b}$  (on omet la dépendance en



$f$  pour simplifier la notation) donc, en sommant et en utilisant le lemme,  $\mathcal{I}_+^{a,b} = \mathcal{I}_-^{a,b}$  :  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$ . Par contre, si  $f$  n'est pas intégrable sur  $[a, c]$ ,  $\mathcal{I}_-^{a,c} < \mathcal{I}_+^{a,c}$  et le lemme donne

$$\mathcal{I}_-^{a,b} = \mathcal{I}_-^{a,c} + \mathcal{I}_-^{c,b} < \mathcal{I}_+^{a,c} + \mathcal{I}_+^{c,b} = \mathcal{I}_+^{a,b},$$

de sorte que  $f$  n'est pas intégrable sur  $[a, b]$ . C'est similaire sur  $[c, b]$ . Il y a donc équivalence entre l'intégrabilité sur le grand intervalle et l'intégrabilité sur les deux petits qui le constitue. On retiendra la proposition suivante, qui étend ce phénomène à plusieurs sous-intervalles (par une récurrence facile).

**PROPOSITION 24.** *Soient une fonction  $f$  bornée sur  $[a, b]$  et une subdivision  $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$  de  $[a, b]$ .  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$  si et seulement si  $f$  est intégrable tous les intervalles  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ .*

L'énoncé suivant atteint le but visé : on démontre que toute fonction continue admet une primitive.

**Énoncé indispensable 20 : intégrabilité des fonctions continues et primitives**

Toute fonction continue  $f$  sur  $[a, b]$  est intégrable sur  $[a, b]$ . De plus, la formule  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  définit une primitive de  $f$  sur  $[a, b]$ .

*Démonstration.* Comme  $f$  est continue sur  $[a, b]$ ,  $f$  y est bornée. On peut donc définir, pour tout  $x \in [a, b]$  :

$$F_{\pm}(x) = \mathcal{I}_{\pm}^{a,x}(f).$$

Nous allons montrer que les fonction  $F_+$  et  $F_-$  sont deux primitives de  $f$ . Puisque  $F_{\pm}(a) = \mathcal{I}_{\pm}^{a,a}(f) = 0$ , ces deux primitives sont égales sur l'intervalle  $[a, b]$ , ce qui assure l'intégrabilité de  $f$  sur  $[a, x]$ , pour tout  $x \in [a, b]$ , et en particulier sur  $[a, b]$ . Et  $F = F_+ = F_-$  est bien une primitive de  $f$  sur  $[a, b]$ .

Montrons donc que  $F_+$  est une primitive de  $f$  (le cas de  $F_-$  étant similaire). Soient  $x \in [a, b]$  et  $\varepsilon > 0$ . La continuité de  $f$  en  $x$  donne un nombre  $\eta > 0$  tel que, pour tout  $y \in [a, b]$  :

$$|y - x| \leq \eta \implies f(x) - \varepsilon \leq f(y) \leq f(x) + \varepsilon.$$

Pour  $y \in [a, b]$  tel que  $x < y < x + \eta$ , le lemme 2 donne (en omettant la dépendance en  $f$ ) :

$$F_+(y) = \mathcal{I}_+^{a,y} = \mathcal{I}_+^{a,x} + \mathcal{I}_+^{x,y} = F_+(x) + \mathcal{I}_+^{x,y},$$

de sorte que l'on trouve, avec la proposition 23 et la définition de  $\eta$  :

$$\frac{F_+(y) - F_+(x)}{y - x} = \frac{\mathcal{I}_+^{x,y}}{y - x} \in [f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon].$$

Le cas où  $x - \eta < y < x$  se traite de même (attention :  $y < x$ ) :

$$F_+(x) = \mathcal{I}_+^{a,x} = \mathcal{I}_+^{a,y} + \mathcal{I}_+^{y,x} = F_+(y) + \mathcal{I}_+^{y,x},$$

donc

$$\frac{F_+(y) - F_+(x)}{y - x} = \frac{\mathcal{I}_+^{y,x}}{x - y} \in [f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon].$$

Cela prouve que  $\lim_{y \rightarrow x} \frac{F_+(y) - F_+(x)}{y - x} = f(x)$ . Autrement dit,  $F_+$  est dérivable, de dérivée  $f$ , sur  $[a, b]$ . On notera qu'en  $a$  (resp.  $b$ ), il s'agit d'une dérivée à droite (resp. gauche).  $\diamond$

REMARQUE 33. Ce théorème donne deux moyens d'intégrer les fonctions continues  $f$  sur  $[a, b]$ . Si  $\alpha, \beta \in [a, b]$  et  $\alpha \leq \beta$ , puisque  $f$  est intégrable sur  $[\alpha, \beta]$ , on peut poser  $\int_\alpha^\beta f = \mathcal{I}_\pm^{\alpha, \beta}(f)$ . On peut aussi utiliser la primitive  $F$  donnée par le théorème et faire comme au premier semestre en posant  $\int_\alpha^\beta f = F(\beta) - F(\alpha)$ . Ces deux définitions coïncident grâce à la relation de Chasles :

$$F(\beta) - F(\alpha) = \mathcal{I}_\pm^{a, \beta}(f) - \mathcal{I}_\pm^{a, \alpha}(f) = \mathcal{I}_\pm^{\alpha, \beta}(f).$$

Nous disposons de deux classes de fonctions intégrables : les fonctions en escalier et les fonctions continues. On peut les inclure dans une famille plus vaste, celle des fonctions continues par morceaux.

DEFINITION 17. Une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est dite *continue par morceaux* s'il existe une subdivision  $\sigma = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$  de  $[a, b]$  telle que pour  $i = 1, \dots, n$ ,

- $f$  est continue sur l'intervalle  $]x_{i-1}, x_i[$ ,
- $f$  admet une limite finie à droite en  $x_{i-1}$ ,
- et  $f$  admet une limite finie à gauche en  $x_i$ .

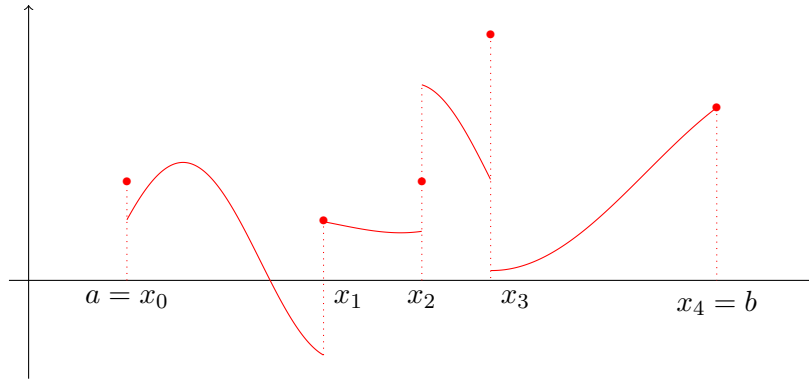


FIGURE 8. Une fonction continue par morceaux

Cette définition signifie que, pour chaque indice  $i \in [1, n]$ , la restriction de  $f$  à  $]x_{i-1}, x_i[$  se prolonge en une fonction continue  $f_i$  sur le segment  $[x_{i-1}, x_i]$ . La fonction  $f_i$  est définie explicitement en posant  $f_i(x) = f(x)$  pour  $x \in ]x_{i-1}, x_i[$ , puis  $f_i(x_{i-1}) = \lim_{x \rightarrow x_{i-1}^+} f(x)$  et  $f_i(x_i) = \lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x)$ .

En particulier, les fonctions  $f_i$  sont bornées (puisque continues sur un segment) et donc  $f$  aussi : si l'on appelle  $M_i$  le maximum de chaque fonction  $|f_i|$ , on a explicitement

$$\sup_{[a, b]} |f| = \max(M_1, \dots, M_n, |f(x_0)|, \dots, |f(x_n)|).$$

**Énoncé indispensable 21 : intégrabilité des fonctions continues par morceaux**

Toute fonction continue par morceaux sur  $[a, b]$  est intégrable.

*Démonstration.* Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $[a, b]$ , associée à une subdivision  $\sigma = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$ . La proposition 24 dit que  $f$  est intégrable si et seulement si  $f$  est intégrable sur chaque segment  $[x_{i-1}, x_i]$ . Or, sur chaque segment  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $f$  coïncide avec la fonction  $f_i$ , sauf aux points  $x_{i-1}$  et  $x_i$  : puisque  $f_i$  est continue donc intégrable, on en déduit que  $f$  est intégrable sur  $[x_{i-1}, x_i]$ , par la remarque 32.  $\diamond$

REMARQUE 34. L'intégrale définie pour les fonctions intégrables a toutes les propriétés usuelles de l'intégrale des fonctions en escaliers (linéarité, relation de Chasles, croissance, lien avec la valeur absolue). Précisément, on peut remplacer « en escalier » par « intégrable » dans la proposition 22. La relation de Chasles, en particulier, découle directement du lemme 2. Les autres propriétés s'obtiennent aussi par des passages à la borne supérieure/inférieure, mais nécessitent réellement l'intégrabilité des fonctions  $f$  et  $g$  en jeu. Par exemple, on réalise assez vite que  $\mathcal{I}_+(-f) = -\mathcal{I}_-(f)$  et  $\mathcal{I}_-(f) + \mathcal{I}_-(g) \leq \mathcal{I}_-(f+g) \leq \mathcal{I}_+(f+g) \leq \mathcal{I}_+(f) + \mathcal{I}_+(g)$ . Et c'est l'intégrabilité de  $f$  et  $g$  qui permet d'en déduire que  $-f$  et  $f+g$  sont intégrables.

Pour les fonctions continues, ces propriétés se voient facilement en écrivant les intégrales comme des différences de valeurs de primitives.

**Pour aller plus loin 2 : intégrale de Lebesgue**

La théorie de l'intégrale présentée ici est celle de *l'intégrale de Riemann*. On a vu que la fonction indicatrice des rationnels n'est pas intégrable dans ce cadre. La suite de la licence fera découvrir au lecteur la théorie de *l'intégrale de Lebesgue*. Dans ce nouveau cadre, on pourra intégrer la fonction indicatrice des rationnels sur  $[0, 1]$  ! Et que vaut son intégrale ? 0 ? 1 ?  $1/2$  ?

La réponse est 0. L'un des aspects fondamentaux de la théorie de Lebesgue est la notion de *mesure* : on y mesure la taille des parties de  $\mathbb{R}$ . Il se trouve qu'en ce sens les rationnels de  $[0, 1]$  forment une partie de mesure nulle, donc la fonction indicatrice des rationnels est nulle sauf sur une partie de mesure nulle : c'est pour ça que son intégrale est nulle. C'est comme si on calculait l'intégrale de Riemann d'une fonction nulle sauf en un nombre fini de points.

Il ne faudrait pas croire que la théorie de Lebesgue résout tous les problèmes et rend intégrables toutes les fonctions. Il y a des fonctions bornées qu'on ne pourra toujours pas intégrer sur un segment. Mais elles sont plus compliquées à construire.

**4.5. Compléments sur l'intégrale.** Pour clore ce chapitre sur l'intégrale, nous allons évoquer quelques résultats classiques qui donnent des outils souvent utiles.

4.5.1. *Formule de la moyenne.* Si  $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$ , elle y atteint un minimum  $m = \min_{[a,b]}(f)$  et un maximum  $M = \max_{[a,b]}(f)$ . Les inégalités

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$

montrent que la moyenne de  $f$ , c'est-à-dire  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$ , est dans le segment  $[m, M]$ . Le théorème des valeurs intermédiaires dit alors que la moyenne est une valeur atteinte : il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f = f(c)$ .

L'énoncé suivant généralise ceci au cas d'une moyenne pondérée par une fonction  $g$ .

**Énoncé indispensable 22 : formule de la moyenne**

Soient  $f$  une fonction continue et  $g$  une fonction positive et continue par morceaux sur un intervalle  $[a, b]$ . Alors il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g$ .

*Démonstration.* En notant  $M$  (resp.  $m$ ) le maximum (resp. minimum) de  $f$ , on a par définition  $m \leq f(t) \leq M$  pour tout  $a \leq t \leq b$  et on peut multiplier cette inégalité par  $g(t) \geq 0$  pour obtenir  $mg(t) \leq f(t)g(t) \leq Mg(t)$ . En intégrant ces inégalités, on obtient

$$m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g.$$

Cela montre que  $\int_a^b fg$  appartient à l'intervalle  $[Lm, LM]$ , où  $L = \int_a^b g$ . Puisque  $LM$  (resp.  $Lm$ ) est le maximum (resp. minimum) de la fonction continue  $Lf$  sur  $[a, b]$ , le théorème des valeurs intermédiaires dit qu'il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $\int_a^b fg = Lf(c) = f(c) \int_a^b g$ .  $\diamond$

4.5.2. *Formules de Taylor.* La formule de Taylor avec reste intégral généralise la formule fondamentale liant une fonction et sa dérivée

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$$

en utilisant les dérivées d'ordre supérieur. L'idée est d'intégrer par parties le membre de droite en

$$\int_a^b f'(t) dt = [f'(t)(t-b)]_a^b - \int_a^b f''(t)(t-b) dt,$$

d'où, après simplification :

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \int_a^b f''(t)(b-t) dt.$$

Et on peut recommencer... si  $f$  est assez dérivable.

**Énoncé indispensable 23 : formule de Taylor avec reste intégral**

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^{n+1}$  sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Pour tous  $a, b \in I$ ,

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \dots + f^{(n)}(a) \frac{(b-a)^n}{n!} + \int_a^b f^{(n+1)}(t) \frac{(b-t)^n}{n!} dt.$$

Si on préfère éviter les pointillés, on peut écrire cette formule sous la forme

$$f(b) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b f^{(n+1)}(t) \frac{(b-t)^n}{n!} dt.$$

*Démonstration.* On procède par récurrence sur  $n$ .

Initialisation. Pour  $n = 0$ , la formule est  $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) dt$ . Elle découle du lien entre primitive et intégrale :  $f$  est une primitive de  $f'$ .

Hérédité. Supposons la formule démontrée au rang  $n-1$  :

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \dots + f^{(n-1)}(a) \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \int_a^b f^{(n)}(t) \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt.$$

Pour prouver la formule au rang  $n$ , on intègre par parties l'intégrale à droite (en posant  $u(t) = f^{(n)}(t)$  et  $v'(t) = \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}$ , de sorte que  $u'(t) = f^{(n+1)}(t)$  et  $v(t) = -\frac{(b-t)^n}{n!}$ ) :

$$\begin{aligned} \int_a^b f^{(n)}(t) \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt &= \left[ f^{(n)}(t) \left( -\frac{(b-t)^n}{n!} \right) \right]_a^b - \int_a^b f^{(n+1)}(t) \left( -\frac{(b-t)^n}{n!} \right) dt \\ &= f^{(n)}(a) \frac{(b-a)^n}{n!} + \int_a^b f^{(n+1)}(t) \frac{(b-t)^n}{n!} dt. \end{aligned}$$

En combinant cette égalité avec la formule donnée par la récurrence, on obtient bien la formule recherchée au rang  $n$ .  $\diamond$

Grâce à la formule de la moyenne, on en déduit une généralisation de l'égalité des accroissements finis ( $n = 0$  ci-dessous).

**Énoncé indispensable 24 : formule de Taylor-Lagrange**

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^{n+1}$  sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Pour tous  $a, b \in I$ , il y a un réel  $c$  entre  $a$  et  $b$  tel que :

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \dots + f^{(n)}(a) \frac{(b-a)^n}{n!} + f^{(n+1)}(c) \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

*Démonstration.* Quitte à considérer la fonction  $g : t \mapsto f(-t)$ , on peut supposer  $a \leq b$ . La formule de la moyenne donne un  $c \in [a, b]$  tel que

$$\int_a^b f^{(n+1)}(t) \frac{(b-t)^n}{n!} dt = f^{(n+1)}(c) \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} dt$$

et l'intégrale à droite vaut  $\left[ -\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_a^b = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ .  $\diamond$

On en déduit rapidement la formule de Taylor-Young pour les développements limités de fonctions  $C^{n+1}$  :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} x^n + O((x - x_0)^{n+1})$$

quand  $x \rightarrow x_0$ .

Pour voir cette formule asymptotique, on pose  $a = x_0$  et  $b = x$  dans la formule de Taylor-Lagrange. Le terme de reste est  $f^{(n+1)}(c) \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$ , avec  $c \in [x_0, x]$ . Par continuité,  $f^{(n+1)}$  est bornée au voisinage de  $x_0$ . On voit donc que le reste est borné par une constante fois  $|x - x_0|^{n+1}$  si  $x$  est proche de  $x_0$ .

Il faut bien remarquer que la formule de Taylor avec reste intégral est beaucoup plus forte que la formule de Taylor-Young. Son reste est explicite : on a toute l'information, toute la précision voulue. Et elle a une portée bien plus grande : elle est valable pour des points  $a$  et  $b$  pas forcément proches.

#### 4.5.3. Sommes de Riemann.

DEFINITION 18. Une *subdivision marquée*  $(\sigma, \theta)$  d'un intervalle  $[a, b]$  est la donnée d'une subdivision  $\sigma = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$  de  $[a, b]$  et d'un marquage  $\theta = \{y_1, y_1, \dots, y_n\}$  où chaque  $y_i$  est dans l'intervalle  $[x_{i-1}, x_i]$ .

Autrement dit, on choisit un point dans chaque intervalle défini par la subdivision.

DEFINITION 19. Soit  $(\sigma, \theta)$  une subdivision marquée de  $[a, b]$ . Soit  $f$  une fonction définie sur  $[a, b]$ . La *somme de Riemann* de  $f$  associée à la subdivision marquée  $(\sigma, \theta)$  est

$$S(f, \sigma, \theta) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(y_i).$$

On peut voir  $S(f, \sigma, \theta)$  comme l'intégrale d'une fonction en escalier qui prend la valeur  $f(y_i)$  sur l'intervalle  $]x_{i-1}, x_i[$ , pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

EXEMPLE 23. Soit  $\sigma = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$  la subdivision régulière de  $[0, 1]$  en  $n$  intervalles. Si on prend le marquage  $\theta_1 = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\}$ , on

trouve  $S(f, \sigma, \theta_1) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ . Pour le marquage  $\theta_2 = \{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, n\}$ ,

c'est  $S(f, \sigma, \theta_2) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ . On peut aussi marquer au milieu de chaque

intervalle, etc.

Le théorème suivant est vrai.

**Énoncé indispensable 25 : somme de Riemann et intégrale**

Soit  $f$  une fonction intégrable sur  $[a, b]$  et  $(\sigma_n, \theta_n)$  une suite de subdivisions marquées de  $[a, b]$ . Si on suppose que le pas de  $\sigma_n$  tend vers 0, alors

$$S(f, \sigma_n, \theta_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) dt.$$

Nous montrerons plutôt le théorème plus précis qu'on obtient en supposant de plus que  $f$  est  $C^1$ .

**THÉORÈME 7.** Soient  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$  et  $(\sigma, \theta)$  une subdivision marquée de  $[a, b]$ . Alors :

$$\left| \int_a^b f(t) dt - S(f, \sigma, \theta) \right| \leq |\sigma|(b-a) \sup_{[a,b]} |f'|,$$

où  $|\sigma|$  est le pas de la subdivision  $\sigma$ .

*Démonstration.* Soit  $\varphi$  la fonction en escalier telle que  $\varphi(x_i) = f(x_i)$  pour  $i = 0, \dots, n$  et dont la valeur sur chaque intervalle  $]x_{i-1}, x_i[$  est  $f(y_i)$ , pour  $i = 1, \dots, n$ . On a :

$$\left| \int_a^b f(t) dt - S(f, \sigma, \theta) \right| = \left| \int_a^b (f - \varphi)(t) dt \right| \leq \int_a^b |f - \varphi|(t) dt.$$

Montrons maintenant que  $|f - \varphi| \leq |\sigma| \sup_{[a,b]} |f'|$  ce qui permettra de conclure en intégrant entre  $a$  et  $b$ . L'inégalité est vraie aux points  $x_i$ , puisque  $f(x_i) = \varphi(x_i)$  pour tout  $i$ . Reste à considérer un point  $x$  de l'un des intervalles de la subdivision,  $]x_{i-1}, x_i[$ . Alors on a  $|f(x) - \varphi(x)| = |f(x) - f(y_i)|$  et, d'après l'inégalité des accroissements finis, cette dernière grandeur est elle-même inférieure à  $|x - y_i| \sup_{[a,b]} |f'|$ . Or  $y_i$  et  $x$  sont dans le même intervalle de la subdivision  $\sigma$ , donc  $|x - y_i| \leq |\sigma|$ . Ceci prouve qu'on a bien  $|f(x) - \varphi(x)| \leq |\sigma| \sup_{[a,b]} |f'|$ .  $\diamond$

**EXEMPLE 24.** Typiquement, on peut considérer l'exemple de la subdivision régulière de  $[0, 1]$  en  $n$  intervalles, avec le marquage standard  $\theta_1$ . Si  $f$  est une fonction  $C^1$  sur  $[0, 1]$ ,

$$\left| \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{\sup_{[0,1]} |f'|}{n}.$$

donc  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(t) dt$ . Avec le marquage  $\theta_2$ , on voit de même

que  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(t) dt$ . On peut ainsi calculer des limites qu'on ne saurait pas traiter autrement. Par exemple, en posant  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ , on

trouve

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2.$$

4.5.4. *Calculs approchés d'intégrales.* Un problème important est de savoir en pratique calculer des valeurs approchées d'intégrales. Dans ce but, on peut approcher l'intégrande par des fonctions en escalier, ou affine par morceaux, ou plus complexes... Le point de départ est le théorème précédent sur les sommes de Riemann : une somme de Riemann n'est pas forcément difficile à calculer et peut fournir une approximation de l'intégrale. Dans l'exemple ci-dessus, on a vu que l'erreur commise est « en  $1/n$  », c'est-à-dire majorée par une constante fois  $1/n$ .

On peut, sans augmenter le nombre de calculs à faire (calculer  $n$  fois une valeur de la fonction), obtenir une approximation en  $1/n^2$ , grâce à la méthode des points milieux. C'est ce que nous présentons maintenant pour compléter cette section.

Soient  $n$  un entier strictement positif et  $f$  une fonction régulière (de classe  $C^2$ ) sur  $[a, b]$ . La *méthode des rectangles* consiste à utiliser la somme de Riemann  $S(f, \sigma, \theta)$  avec :

$$x_i = a + i \frac{b-a}{n} \quad \text{et} \quad y_i = x_{i-1} \quad \text{pour } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Comme  $f$  est de classe  $C^1$ , cette somme de Riemann approche l'intégrale de  $f$  en respectant l'estimation suivante

$$\left| \int_a^b f(t) dt - S(f, \sigma, \theta) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{n} \sup_{[a,b]} |f'|.$$

REMARQUE 35. Pour  $f(x) = x$  sur  $[0, 1]$ , il est facile de vérifier que  $\int_a^b f(t) dt = S(f, \sigma, \theta) + \frac{1}{2n}$ . Ainsi la vitesse de convergence en  $\frac{1}{n}$  ne peut être améliorée sans changer de méthode.

### Test : deux calculs exacts de l'erreur

Démontrer le résultat de la remarque 35 et montrer que  $\int_a^b f(t) dt = S(f, \sigma, \theta)$  lorsqu'on choisit  $y_i = x_{i-1} + \frac{1}{2n}$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Plus généralement, la *méthode des points milieux* consiste à garder la même subdivision (les  $x_i$ ), mais en changeant le marquage : on choisit  $y_i = x_{i-1} + \frac{b-a}{2n} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Au lieu de marquer avec le point gauche de chaque intervalle, on marque au milieu. Dans ce cas, on va montrer que la somme de Riemann approche l'intégrale avec une précision en  $1/n^2$ .

THÉORÈME 8. Si  $f$  est de classe  $C^2$ , la méthode des points milieux donne :

$$\left| \int_a^b f(t) dt - S(f, \sigma, \theta) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{24 n^2} \sup_{[a,b]} |f''|.$$



*Démonstration.* Soit  $\varphi$  une fonction en escalier dont la valeur sur l'intervalle  $]x_{i-1}, x_i[$  est  $f(y_i)$ , pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ . On a :

$$\int_a^b f(t) dt - S(f, \sigma, \theta) = \int_a^b (f - \varphi)(t) dt = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f - \varphi)(t) dt.$$

Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  et pour tout  $t \in ]x_{i-1}, x_i[$ , la définition de  $\varphi$  donne  $(f - \varphi)(t) = f(t) - f(y_i)$ . La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 donne alors un point  $c_{t,i}$  dans l'intervalle délimité par  $y_i$  et  $t$  tel que :

$$(f - \varphi)(t) = f(t) - f(y_i) = (t - y_i)f'(y_i) + \frac{(t - y_i)^2}{2}f''(c_{t,i}),$$

de sorte que

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (f - \varphi)(t) dt = f'(y_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} (t - y_i) dt + \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (t - y_i)^2 f''(c_{t,i}) dt$$

La point clef, c'est que la première intégrale est nulle. En effet, elle vaut

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (t - y_i) dt = \frac{(x_i - y_i)^2 - (x_{i-1} - y_i)^2}{2} = 0,$$

parce que  $y_i$  est le milieu du segment  $[x_{i-1}, x_i]$ , ce qui signifie que  $x_i - y_i = y_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{2n}$ . Ensuite, le second terme se majore par

$$\left| \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (t - y_i)^2 f''(c_{t,i}) dt \right| \leq \frac{1}{2} \sup_{[a,b]} |f''| \int_{x_{i-1}}^{x_i} (t - y_i)^2 dt = \frac{(b-a)^3}{24n^3} \sup_{[a,b]} |f''|.$$

Lorsqu'on somme de  $i = 1$  à  $i = n$ , on obtient finalement

$$\left| \int_a^b f(t) dt - S(f, \sigma, \theta) \right| \leq n \frac{(b-a)^3}{24n^3} \sup_{[a,b]} |f''|.$$

Et c'est bien le résultat annoncé.  $\diamond$



## Algèbre linéaire

### 1. Espaces vectoriels

**1.1. Espaces vectoriels.** A partir de l'ensemble  $\mathbb{R}^n$  et de ses opérations naturelles, nous allons dégager une liste de propriétés (ou axiomes) décrivant la *structure d'espace vectoriel*, qui est un moyen de faire du calcul vectoriel avec toutes sortes d'objets mathématiques. Nous donnerons rapidement des exemples qui couvrent tout le spectre des mathématiques : la géométrie (plan, espace), l'algèbre (espaces de polynômes), l'analyse (espaces de fonctions)... Les outils que nous allons développer ont donc une portée universelle en mathématiques, et au-delà.

Rappelons d'abord que pour un entier  $n \geq 1$ ,  $\mathbb{R}^n$  désigne l'ensemble des  $n$ -uplets de réels, c'est-à-dire

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Sur  $\mathbb{R}^n$  est naturellement définie une addition, construite à partir de celle de  $\mathbb{R}$  sur chacune des composantes :

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

Il est aussi possible de définir le produit d'un réel  $\lambda$  par un élément de  $\mathbb{R}^n$  :

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

Nous avons donc défini deux opérations sur  $\mathbb{R}^n$ . La première, *l'addition*, associe à deux éléments  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  un autre élément  $x + y$  de  $\mathbb{R}^n$ . On dit que c'est une *loi interne*. La seconde, *la multiplication par un réel*, associe à un réel  $\lambda$  et un élément  $x = (x_1, \dots, x_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  un nouvel élément  $\lambda x$  de  $\mathbb{R}^n$ , on dit que c'est une *loi externe*.

Examinons maintenant les règles auxquelles obéissent ces lois. Nous n'en retiendrons que celles qui, par l'usage, se sont montrées les plus pertinentes en vue de la généralisation annoncée.

**Les règles de l'addition.** On vérifie facilement, à partir des propriétés usuelles de l'addition des réels, que l'addition dans  $\mathbb{R}^n$  vérifie les propriétés suivantes :

- (1)  $(x_1, \dots, x_n) + (0, \dots, 0) = (x_1, \dots, x_n)$ ,
- (2)  $(x_1, \dots, x_n) + (-x_1, \dots, -x_n) = (0, \dots, 0)$ ,
- (3)  $((x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)) + (z_1, \dots, z_n) = (x_1, \dots, x_n) + ((y_1, \dots, y_n) + (z_1, \dots, z_n))$ ,
- (4)  $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_n) + (x_1, \dots, x_n)$ ,

quels que soient les éléments  $(x_1, \dots, x_n)$ ,  $(y_1, \dots, y_n)$ ,  $(z_1, \dots, z_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ .

En vertu de (1), on dit que l'élément  $(0, \dots, 0)$  est le *neutre* de l'addition et, en vertu de (2), que l'élément  $(-x_1, \dots, -x_n)$  est le *symétrique* de  $(x_1, \dots, x_n)$ . La propriété (3) s'appelle l'*associativité* de l'addition, la (4) s'appelle la *commutativité* de l'addition.

**Les règles de la multiplication par un réel.** On vérifie facilement, à partir des propriétés usuelles de l'addition et de la multiplication des réels, que la loi externe précédemment définie vérifie les propriétés suivantes :

- (1)  $1(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)$ ,
- (2)  $(\lambda\mu)(x_1, \dots, x_n) = \lambda[\mu(x_1, \dots, x_n)]$ ,
- (3)  $(\lambda + \mu)(x_1, \dots, x_n) = \lambda(x_1, \dots, x_n) + \mu(x_1, \dots, x_n)$ ,
- (4)  $\lambda[(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)] = \lambda(x_1, \dots, x_n) + \lambda(y_1, \dots, y_n)$ ,

ceci pour tous réels  $\lambda$  et  $\mu$  et tous  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ .

Les deux premières propriétés expriment la compatibilité entre le produit au sein des réels et la multiplication (externe) par un réel. Les deux autres expriment la *distributivité* de la multiplication par rapport à l'addition.

Dans ce qu'on vient de décrire, on peut remplacer les nombres réels par les nombres complexes : ça ne change rien. **Dans la suite, le symbole  $\mathbb{K}$  désignera indifféremment  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .** Nous travaillerons toujours avec des nombres dans  $\mathbb{K}$ , qu'on appellera parfois des *scalaires*.

Nous allons maintenant donner une définition générale de ce que l'on appelle un espace vectoriel, directement inspirée des propriétés que nous venons d'énumérer.

### Énoncé indispensable 1 : espace vectoriel

Un  $\mathbb{K}$ -*espace vectoriel* est un ensemble  $E$  muni d'une loi interne  $+$  (dite *addition*) et d'une loi externe  $\cdot$  (dite *multiplication par un scalaire*).

L'addition  $+$  est une application de  $E \times E$  dans  $E$  qui vérifie les propriétés suivantes :

- (1) il existe un élément de  $E$ , noté  $0$ , qui vérifie  $x + 0 = 0 + x = x$  pour tout  $x \in E$  ;
- (2) pour tout  $x \in E$ , il existe un élément  $x'$  de  $E$ , qui vérifie  $x + x' = x' + x = 0$  ;
- (3) pour tous  $x, y$  et  $z$  dans  $E$ ,  $(x + y) + z = x + (y + z)$  ;
- (4) pour tous  $x$  et  $y$  dans  $E$ ,  $x + y = y + x$ .

La multiplication par un scalaire  $\cdot$  est une application de  $\mathbb{K} \times E$  dans  $E$  qui vérifie les propriétés suivantes, pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  et tous  $x, y \in E$  :

- (1)  $1 \cdot x = x$  ;
- (2)  $(\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$  ;
- (3)  $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$  ;
- (4)  $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ .

- REMARQUES 5. — Au lieu de «  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel », on dit parfois « espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  » et très souvent « espace vectoriel ». Les éléments d'un espace vectoriel  $E$  sont appelés *vecteurs*, par opposition aux *scalaires*, qui sont les éléments de  $\mathbb{K}$  (des nombres).
- Le lecteur pointilleux notera qu'un espace vectoriel serait plutôt le triplet  $(E, +, \cdot)$ , puisque les lois font partie de la notion. En fait, tout le monde parle de l'espace vectoriel  $E$  et ça n'empêche pas la Terre de tourner.
  - Dans la premier axiome de l'addition, l'élément 0 est un élément de  $E$  et pas le 0 de  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , donc on pourrait craindre un conflit de notation. En pratique, ça n'est pas trop gênant. Occasionnellement, on le notera  $0_E$ . On peut noter que ce 0 est unique : si un élément  $0'$  de  $E$  vérifie aussi  $x + 0' = 0' + x = x$  pour tout  $x$  de  $E$ , on peut combiner les propriétés de 0 et  $0'$  pour écrire  $0' = 0' + 0 = 0$ . On dit que 0 est l'*élément neutre* de l'addition.
  - De même, on vérifie l'unicité de l'élément  $x'$  dans la deuxième propriété et on dit que  $x'$  est le *symétrique* de  $x$  pour l'addition. On le note  $-x$ . Cela donne une notion de soustraction : on notera  $x - y$  pour  $x + (-y)$ .
  - La commutativité de l'addition (4) donne la possibilité de simplifier l'écriture des expressions en en intervertissant les termes de manière arbitraire, alors que l'associativité (3) permet de les regrouper arbitrairement, "sans prendre garde aux parenthèses".
  - Concernant la loi externe, on omet presque toujours le  $\cdot$  dans les expressions, si bien que l'élément  $\lambda \cdot x$  se note  $\lambda x$  : en pratique, on peut de toute façon calculer « comme d'habitude », grâce aux axiomes.

### Test : calcul comme d'habitude

Vérifier que si  $x, y, z, u, v$  sont des éléments d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel,

$$3x + 5y + i((z + u) + v) = 4x + i(z + v - iy) + 4y + iu - x + iu.$$

La propriété suivante est naturelle mais pas si anodine.

PROPOSITION 25. *Soit  $x$  un élément d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On a  $\lambda \cdot x = 0$  si et seulement si  $\lambda = 0$  ou  $x = 0$ .*

*Démonstration.* Pour le sens  $\Leftarrow$ , on suppose d'abord  $\lambda = 0$ . Partons de l'égalité  $0 = 0 + 0$  dans  $\mathbb{K}$  et multiplions par  $x$  : par distributivité,  $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$ . En soustrayant  $0 \cdot x$ , on arrive à  $0 = 0 \cdot x$ . Si on suppose  $x = 0$ , c'est pareil, en partant de l'égalité  $0 = 0 + 0$  dans  $E$ , qu'on multiplie par  $\lambda$  : on trouve  $\lambda \cdot 0 = \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0$ . En soustrayant  $\lambda \cdot 0$ , on trouve bien  $0 = \lambda \cdot 0$ .

Pour le sens  $\Rightarrow$ , on suppose  $\lambda \cdot x = 0$ . De deux choses l'une : soit  $\lambda = 0$ , soit  $\lambda \neq 0$ . Dans le second cas,  $\lambda$  a un inverse, donc on peut multiplier l'équation par  $\frac{1}{\lambda}$  pour trouver  $\frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot x) = \frac{1}{\lambda} \cdot 0$ . Le membre de droite est nul par le sens  $\Leftarrow$ . Grâce aux axiomes vérifiés par  $\cdot$ , le membre de gauche se simplifie :  $\frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot x) = (\frac{1}{\lambda} \times \lambda) \cdot x = 1 \cdot x = x$ . On aboutit à  $x = 0$ .  $\diamond$

REMARQUE 36. On pourrait avoir peur de confondre le vecteur  $(-1) \cdot x$  avec le symétrique  $-x$  de  $x$ . Pas de problème : ils sont égaux puisque

$$x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = 0.$$

REMARQUE 37. Pourquoi  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ? A vrai dire, on pourrait aussi travailler avec les nombres rationnels ( $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ )... mais pas avec les nombres entiers. La notion d'espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  nécessite de pouvoir additionner, multiplier, soustraire et surtout diviser les éléments de  $\mathbb{K}$ . Par exemple, dans la preuve de la proposition, on a divisé par  $\lambda$ . Presque tout ce qu'on va dire restera vrai si  $\mathbb{K}$  vérifie une liste d'axiomes, ceux de la structure de *corps*, notion étudiée dans un cours ultérieur. Si on veut vraiment se passer de la division dans  $\mathbb{K}$ , on peut... et cela conduit à la notion de *module*, une structure plus générale que celle d'espace vectoriel, mais où par exemple la proposition ci-dessus a tendance à être fausse.

Les exemples suivants sont fondamentaux.

EXEMPLE 25.  $\mathbb{R}^n$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. En particulier, la droite réelle et surtout l'ensemble des vecteurs du plan ( $\mathbb{R}^2$ ) ou de l'espace ( $\mathbb{R}^3$ ) sont des exemples géométriques modèles, qui permettent de faire des dessins. C'est ce cadre visuel simple qu'on cherche à généraliser pour appréhender des espaces plus compliqués.

Moins visuel, mais formellement analogue,  $\mathbb{C}^n$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

EXEMPLE 26. L'ensemble  $M_{n,p}(\mathbb{K})$  des matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes et à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , muni de l'addition usuelle des matrices et de la multiplication d'une matrice par un nombre (réel ou complexe), est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Ici, le neutre est la matrice nulle.

EXEMPLE 27. L'ensemble  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  des suites complexes, muni de l'addition usuelle et de la multiplication par un élément de  $\mathbb{C}$  (terme à terme), est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. L'ensemble  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  des suites réelles est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Ici, le neutre est la suite constante à la valeur 0.

EXEMPLE 28. L'ensemble  $\mathbb{K}[X]$  des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Son neutre est le polynôme nul.

EXEMPLE 29. Soient  $A$  un ensemble quelconque,  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $E^A$  l'ensemble des fonctions de  $A$  dans  $E$ . On peut mimer le cas des suites et définir « terme à terme » des opérations : pour  $f, g \in E^A$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on définit  $f + g : A \rightarrow E$  et  $\lambda \cdot f : A \rightarrow E$  par  $(f + g)(x) = f(x) +_E g(x)$  et  $\lambda \cdot_E f(x) = \lambda f(x)$ , pour tout  $x \in A$ . On vérifie alors que  $E^A$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ . Son neutre est la fonction nulle (constante à la valeur  $0_E$ ).

EXEMPLE 30. Tout  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel est naturellement un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, par restriction des lois, en utilisant l'inclusion  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ . En particulier, on peut regarder l'ensemble  $\mathbb{C}$  comme un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, mais aussi comme un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Cela offre deux regards différents sur un même ensemble, on y reviendra.

EXEMPLE 31. L'ensemble vide est-il un espace vectoriel? Non, puisqu'un espace vectoriel doit contenir un élément neutre 0! Le plus petit qu'on puisse imaginer est le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel *trivial*  $\{0\}$ , avec les seules lois auxquelles il peut obéir ( $0 + 0 = 0$  et  $\lambda \cdot 0 = 0$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ).

**1.2. Sous-espaces vectoriels.** Dans un espace vectoriel, il y a des parties naturelles vis-à-vis des lois définissant la structure d'espace vectoriel.

Par exemple, dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$ , considérons la droite  $F$  passant par l'origine et de pente 2 :  $F = \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ . Elle respecte les lois au sens où on peut additionner ses éléments, les multiplier par un réel, et obtenir un nouvel élément de  $F$ . Ainsi, cette partie  $F$  est naturellement elle-même un espace vectoriel. Il en irait de même de tout plan passant par l'origine. Mais un cercle, ou une droite évitant l'origine, ne conviendraient pas.

### Énoncé indispensable 2 : sous-espace vectoriel

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Un *sous-espace vectoriel* de  $E$  est une partie  $F$  de  $E$  telle que

- (1)  $F$  n'est pas vide ;
- (2)  $\forall x, y \in F, \quad x + y \in F$  ;
- (3)  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \quad \lambda \cdot x \in F$ .

On retiendra qu'un sous-espace vectoriel est une partie non vide qui est laissée stable par les lois.

REMARQUE 38. Le premier axiome dit qu'un sous-espace vectoriel  $F$  contient toujours un élément  $x$ . Par le troisième, on en déduit que  $0 \cdot x = 0$  est dans  $F$ . Ainsi, un sous-espace vectoriel contient toujours l'élément neutre 0. C'est d'ailleurs le moyen usuel de vérifier qu'il n'est pas vide : tester si 0 est dedans.

Un sous-espace vectoriel *hérite naturellement* d'une structure d'espace vectoriel. Notons  $+$  et  $\cdot$  les lois de l'espace vectoriel  $E$  et considérons un sous-espace  $F$  de  $E$ . On peut définir des lois  $+_F : F \times F \rightarrow F$  et  $\cdot_F : \mathbb{K} \times F \rightarrow F$  en posant simplement, pour  $x, y \in F$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$  :

$$x +_F y = x + y \quad \text{et} \quad \lambda \cdot_F x = \lambda \cdot x.$$

La définition d'un sous-espace vectoriel fait que ces formules donnent bien des éléments de  $F$ . Et on peut vérifier que ces lois vérifient les axiomes d'un espace vectoriel. Entre autres, l'élément neutre de  $F$  étant bien sûr celui de  $E$  (qui est dans  $F$  par la remarque ci-dessus), le symétrique de  $x \in F$  est  $(-1) \cdot x \in F$ , etc.

Donnons quelques exemples.

EXEMPLE 32. La droite  $F = \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ . En effet,  $(0, 0)$  est bien dans  $F$  et pour tous  $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $(x, 2x) + (y, 2y) = ((x + y), 2(x + y))$  et  $\lambda(x, 2x) = (\lambda x, 2\lambda x)$ .

EXEMPLE 33. L'ensemble  $F$  des suites complexes convergentes est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ . La suite nulle est en effet convergente, de même que la somme de deux suites convergentes et le produit d'une suite convergente par une constante.

EXEMPLE 34. L'ensemble  $F$  des fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  (l'espace vectoriel de toutes les fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ). La fonction nulle est en effet dérivable, de même que la somme de deux fonctions dérivables et le produit d'une fonction dérivable par une constante.

EXEMPLE 35. Tout espace vectoriel  $E$  contient des sous-espaces évidents :  $E$ , mais aussi  $\{0\}$ .

La notion suivante est très utile.

### Énoncé indispensable 3 : combinaison linéaire

Soit  $E$  un espace vectoriel. On dit qu'un élément  $x$  de  $E$  est une *combinaison linéaire* des éléments  $x_1, \dots, x_n$  de  $E$  s'il s'écrit

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$$

pour certains scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . On notera  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$  l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des éléments  $x_1, \dots, x_n$  :

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \mid \forall i, \lambda_i \in \mathbb{K}\}.$$

On utilisera aussi la notation  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ .

REMARQUE 39. On vérifie rapidement qu'une partie non vide  $F$  d'un espace vectoriel  $E$  est un sous-espace vectoriel si et seulement si toute combinaison linéaire d'éléments de  $F$  est un élément de  $F$ .

Le sens  $\Rightarrow$  consiste à utiliser directement les axiomes d'un sous-espace vectoriel : pour  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  et  $x_1, \dots, x_n \in F$ , on a  $\lambda_i x_i \in F$  pour tout  $i$ , de sorte que leur somme est aussi dans  $F$ .

Le sens  $\Leftarrow$  consiste à observer que les expressions  $x + y$  et  $\lambda x$  sont des combinaisons linéaires des éléments  $x$  et  $y$  de  $F$ .

PROPOSITION 26. Soient  $x_1, \dots, x_n$  des vecteurs d'un espace vectoriel  $E$ . Alors  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et il est inclus dans tout sous-espace  $F$  contenant  $x_1, \dots, x_n$ .

Ainsi,  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$  est le plus petit sous-espace vectoriel de  $E$  qui contient  $x_1, \dots, x_n$ . On dit que c'est le *sous-espace engendré par les vecteurs*  $x_1, \dots, x_n$ .

*Démonstration.* Notons  $V = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ . En écrivant  $0 = \sum_i 0 \cdot x_i$ , on voit que  $V$  contient  $0$  donc n'est pas vide. Pour  $x, y \in V$ , on peut écrire  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$  et  $y = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i$  pour certains scalaires  $\lambda_i$  et  $\mu_i$ . Donc pour tout  $\alpha \in \mathbb{K}$  :

$$x + y = \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \mu_i) x_i \in V \quad \text{et} \quad \alpha x = \sum_{i=1}^n (\alpha \lambda_i) x_i \in V.$$

Cela montre que  $V$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  contenant  $x_1, \dots, x_n$ , il contient leurs combinaisons linéaires (cf. remarque ci-dessus), donc  $V \subset F$ .  $\diamond$

EXEMPLE 36. Dans  $\mathbb{R}^3$ , muni de ses coordonnées usuelles  $x, y, z$ , si on note  $v = (1, 0, 0)$  et  $w = (0, 0, 1)$ ,  $\text{Vect}(v)$  est la droite  $Ox$  et  $\text{Vect}(v, w)$  est le plan d'équation  $y = 0$ .

Une autre façon de construire des sous-espaces est de prendre des intersections.



**PROPOSITION 27.** *Si  $F_1$  et  $F_2$  sont deux sous-espaces d'un espace vectoriel  $E$ , l'intersection  $F_1 \cap F_2$  est encore un sous-espace-vectoriel de  $E$ .*

*Démonstration.* Le neutre 0 est dans les sous-espaces  $F_1$  et  $F_2$ , donc aussi dans  $F_1 \cap F_2$ , qui n'est donc pas vide. Si  $x_1, \dots, x_n$  sont dans  $F_1 \cap F_2$ , ils sont dans les sous-espaces  $F_1$  et  $F_2$ , donc leurs combinaisons linéaires sont aussi dans  $F_1$  et dans  $F_2$ , donc dans  $F_1 \cap F_2$ .  $\diamond$

**REMARQUE 40.** Avec la même preuve, on voit qu'une intersection d'un nombre arbitraire, même infini, de sous-espaces de  $E$  est encore un sous-espace de  $E$ . Ceci autorise la construction suivante.

Si  $A$  est une partie quelconque d'un espace vectoriel  $E$ , il y a au moins un sous-espace qui le contient,  $E$ . On peut donc considérer l'intersection  $F_A$  de tous les sous-espaces vectoriels de  $E$  qui contiennent  $A$  :  $F_A$  est un sous-espace de  $E$ . Et si un sous-espace contient  $A$ , il doit contenir  $F_A$ , par construction. On peut donc appeler  $F_A$  le sous-espace engendré par  $A$ .

Dans le cas où  $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ , on retrouve  $F_A = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ . En fait, pour toute partie (non vide)  $A$ , on peut noter  $\text{Vect}(A)$  l'ensemble des combinaisons linéaires d'un nombre fini (quelconque) d'éléments de  $A$ . On vérifie que c'est un sous-espace contenant  $A$ , donc  $F_A \subset \text{Vect}(A)$ . Et, comme  $F_A$  est un sous-espace et contient  $A$ , il contient les combinaisons linéaires d'éléments de  $A$ , donc  $\text{Vect}(A) \subset F_A$ . Ainsi,  $F_A = \text{Vect}(A)$ .

L'union de deux sous-espaces n'est presque jamais un sous-espace : à la place, on va considérer leur somme.

**DEFINITION 20.** Soient  $F_1$  et  $F_2$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . La *somme* de  $F_1$  et  $F_2$  est définie par

$$F_1 + F_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in F_1, x_2 \in F_2\}.$$

On peut vérifier rapidement que c'est un sous-espace vectoriel. En fait, c'est le sous-espace vectoriel engendré par l'union  $F_1 \cup F_2$ .

### Test : la croix

On se place dans le plan  $\mathbb{R}^2$ . Montrer que l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées sont des sous-espaces vectoriels, mais que leur union ne l'est pas. Quelle est leur somme ?

**1.3. Bases.** Dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$ , tout élément  $(x_1, \dots, x_n)$  est déterminé de manière univoque par ses composantes  $x_1, \dots, x_n$ . Dit comme ça, c'est très spécifique à l'ensemble  $\mathbb{R}^n$ . On va l'exprimer autrement, en faisant intervenir sa structure d'espace vectoriel.

Pour  $1 \leq k \leq n$ , notons  $e_k$  l'élément de  $\mathbb{R}^n$  dont toutes les composantes sont nulles, sauf la  $k$ -ième, qui est égale à 1. Ainsi, dans  $\mathbb{R}^3$  :

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1).$$

Dire que  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , c'est exactement dire que

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

Ainsi, le vecteur  $x$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire de  $e_1, \dots, e_n$ . Et il y a une seule manière de le faire : les coefficients sont les composantes de  $x$ . C'est ce point de vue qui est transposable aux espaces vectoriels, pour peu qu'on ait l'équivalent de cette famille de vecteurs  $(e_1, \dots, e_n)$ .

On se place dans un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  pour le reste du paragraphe.

#### Énoncé indispensable 4 : famille génératrice

Soient  $v_1, \dots, v_n$  des vecteurs de  $E$ . On dit que  $(v_1, \dots, v_n)$  est une *famille génératrice* de  $E$  lorsque  $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n) = E$ .

En d'autres termes, tout élément  $x$  de  $E$  est une combinaison linéaire des vecteurs  $v_1, \dots, v_n$  : il existe des scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tels que

$$x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n.$$

EXEMPLE 37. Dans  $\mathbb{R}^2$ , on considère les vecteurs  $v_1 = (1, 0)$ ,  $v_2 = (-1, 1)$  et  $v_3 = (0, -1)$ . La famille  $(v_1, v_2, v_3)$  est génératrice puisque tout élément  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  s'écrit

$$x = (x_1 + x_2)v_1 + x_2 v_2 + 0 v_3 \quad \text{ou bien} \quad x = 2x_1 v_1 + x_1 v_2 + (x_1 - x_2)v_3.$$

Dans la définition d'une famille génératrice, on demande l'existence d'une écriture sous forme de combinaison linéaire. La notion suivante a trait à l'unicité d'une telle écriture.

#### Énoncé indispensable 5 : famille libre

Soient  $v_1, \dots, v_n$  des vecteurs de  $E$ . On dit que  $(v_1, \dots, v_n)$  est une *famille libre* lorsque pour tous scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  :

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Dans ce cas, on dit aussi que  $v_1, \dots, v_n$  sont des vecteurs linéairement indépendants.

Le contraire d'une famille libre est une *famille liée*. La famille  $(v_1, \dots, v_n)$  est liée si et seulement s'il existe des scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tels que

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \quad \text{et} \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0).$$

Ainsi, l'un des coefficients,  $\lambda_k$ , n'est pas nul et on peut écrire :

$$x_k = -\frac{1}{\lambda_k} \sum_{i \neq k} \lambda_i v_i.$$

Dans une famille liée, l'un des éléments est une combinaison linéaire des autres.

#### Test : familles manifestement liées

Soient  $v$  et  $w$  deux vecteurs d'un espace vectoriel. Prouver que les familles  $(0, v, w)$  et  $(v, v, w)$  sont liées.

EXEMPLE 38. Dans  $\mathbb{R}^2$ , si on reprend les vecteurs  $v_1 = (1, 0)$ ,  $v_2 = (-1, 1)$  et  $v_3 = (0, -1)$ , on voit que la famille  $(v_1, v_2, v_3)$  est liée, puisque  $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ .

Par contre, la famille  $(v_1, v_2)$  est libre car, si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont des réels tels que  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$ , on trouve  $(\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2) = (0, 0)$ , donc  $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$  et  $\lambda_2 = 0$ , ce qui impose  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .

EXEMPLE 39. Plaçons-nous dans l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}_{+}^{\mathbb{R}}$  des fonctions réelles définies sur  $\mathbb{R}_{+}$ . On y considère les vecteurs  $\exp$  et  $\ln$ . Pour vérifier qu'ils sont linéairement indépendants, on se donne des réels  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  tels que  $\lambda_1 \exp + \lambda_2 \ln = 0$ . Cela signifie :

$$\forall x > 0, \quad \lambda_1 \exp(x) + \lambda_2 \ln(x) = 0.$$

Si on choisit  $x = 1$ , on trouve  $\lambda_1 e + 0 = 0$ , donc  $\lambda_1 = 0$ . Si on choisit ensuite  $x = e$  par exemple, on trouve aussi  $\lambda_2 = 0$ . Cela prouve que  $(\exp, \ln)$  est une famille libre.

Soient  $(v_1, \dots, v_n)$  une famille libre et  $x \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ . Si on a deux écritures  $x = \sum_i \lambda_i v_i$  et  $x = \sum_i \mu_i v_i$ , on peut faire leur différence pour trouver  $\sum_i (\lambda_i - \mu_i) v_i = 0$ . La liberté de la famille impose que  $\lambda_i - \mu_i$  soit nul, i.e.  $\lambda_i = \mu_i$ , pour tout  $i$ . En ce sens, il y a unicité de l'écriture sous forme de combinaison linéaire.

### Énoncé indispensable 6 : base

Une base d'un espace vectoriel est une famille à la fois libre et génératrice.

PROPOSITION 28. Soit  $(v_1, \dots, v_n)$  une base de  $E$ . Alors, pour tout vecteur  $x$  de  $E$ , il existe des scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  uniques tels que

$$x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n.$$

Les scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont les *coordonnées* de  $x$  dans la base  $(v_1, \dots, v_n)$ . Bien sûr, ils dépendent de la base qu'on utilise!

*Démonstration.* L'existence d'une telle écriture est la définition d'une famille génératrice. L'unicité vient de la liberté, comme on l'a vu ci-dessus.  $\diamond$

EXEMPLE 40. La famille  $(e_1, \dots, e_n)$  introduite plus haut est une base de  $\mathbb{R}^n$ . On l'appelle la *base canonique* de  $\mathbb{R}^n$  en raison de son caractère très spécial : les coordonnées de  $x = (x_1, \dots, x_n)$  sont ses composantes  $x_1, \dots, x_n$ .

La même famille est une base du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}^n$ .

EXEMPLE 41. Les vecteurs  $v_1 = (1, 0)$  et  $v_2 = (-1, 1)$  forment une base  $(v_1, v_2)$  de  $\mathbb{R}^2$ . Les coordonnées de  $x = (x_1, x_2)$  dans cette base sont  $x_1 + x_2, x_2$ .

REMARQUE 41. Soit  $(v_1, \dots, v_n)$  une famille de  $n$  vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  (on comprendra pourquoi on a choisi précisément  $n$  vecteurs dans le paragraphe suivant). Chaque vecteur  $v_j$  est un  $n$ -uplet :  $v_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj})$ . Cela définit une matrice  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$  : la  $j$ -ième colonne de  $A$  contient les composantes de  $v_j$ . Dire que  $(v_1, \dots, v_n)$  est une base, c'est dire que pour

tout vecteur  $y = (y_1, \dots, y_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ , il existe un unique  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\sum_{j=1}^n \lambda_j v_j = y$ , ou encore, si on écrit cette identité composante par composante :

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} \lambda_j = y_i.$$

On reconnaît un système linéaire associé à la matrice  $A$ , d'inconnues  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  et de second membre  $y$ . La famille est une base si et seulement ce type de système admet toujours une unique solution, c'est-à-dire si la matrice  $A$  est *invertible*.

Ainsi, décider si une famille de  $n$  vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  est une base revient à étudier l'inversibilité de la matrice carrée associée, par exemple en calculant son déterminant.

REMARQUE 42. Il n'est pas complètement vain de parler de la famille vide, celle qui n'a aucun élément... L'espace vectoriel qu'elle engendre est le plus petit sous-espace vectoriel la contenant, à savoir  $\{0\}$ . C'est une famille libre, puisqu'aucune équation ne relie ses éléments. C'est donc une base de l'espace vectoriel trivial  $\{0\}$ .

#### 1.4. La dimension d'un espace vectoriel.

DEFINITION 21. Un espace vectoriel est dit *finiment engendré* s'il possède une famille génératrice  $(v_1, \dots, v_n)$ .

Plusieurs expressions sont synonymes de « finiment engendré » : on parle aussi d'espaces vectoriels de type fini ou bien de dimension finie. C'est sur ces espaces que nous allons travailler pour définir la dimension. Quand il n'y a pas de famille génératrice (finie), on dit souvent que l'espace vectoriel est de dimension infinie.

EXEMPLE 42. L'espace vectoriel  $\mathbb{K}[X]$  des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  n'est pas finiment engendré, il est de dimension infinie. Pour le comprendre, on considère une famille quelconque  $(P_1, \dots, P_n)$  de  $\mathbb{K}[X]$ . Chacun de ces polynômes a un degré. Notons  $d$  le plus grand des degrés des polynômes  $P_1, \dots, P_n$ . Alors toute combinaison linéaire des  $P_i$  est un polynôme de degré au plus  $d$ . Donc  $X^{d+1}$  n'est pas dans  $\text{Vect}(P_1, \dots, P_n)$ . Cela montre que cette famille n'est pas génératrice.

Par contre, le sous-espace  $\mathbb{K}_d[X]$  des polynômes de degré au plus  $d$  est finiment engendré, puisque  $(1, X, X^2, \dots, X^d)$  en est une base.

Commençons par montrer un *théorème d'extraction de base*, affirmant qu'il est possible d'extraire une base d'une famille génératrice quelconque.

THÉORÈME 9. Si  $(v_1, \dots, v_n)$  une famille génératrice de l'espace vectoriel  $E$ , on peut en extraire une base : il existe  $w_1, \dots, w_p \in \{v_1, \dots, v_n\}$  tels que  $(w_1, \dots, w_p)$  est une base.

Autrement dit, en sélectionnant certains des vecteurs  $v_i$ , on obtient une famille qui est encore génératrice, mais qui de plus est libre.

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{G}$  l'ensemble des familles génératrices  $(w_1, \dots, w_p)$  telles que  $p \leq n$  et pour tout indice  $j$ ,  $w_j \in \{v_1, \dots, v_n\}$ . C'est un ensemble fini (il a moins de  $n^n$  éléments) et il n'est pas vide puisqu'il contient  $(v_1, \dots, v_n)$ .

On peut donc trouver dans  $\mathcal{G}$  une famille  $(w_1, \dots, w_p)$  de cardinal minimal, c'est-à-dire avec  $p$  minimal.

Par construction,  $(w_1, \dots, w_p)$  est génératrice. Supposons que cette famille est liée, de sorte que l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres. Quitte à changer la numérotation, on peut supposer que c'est le dernier :

$$w_p = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i w_i,$$

pour des scalaires  $\alpha_i$ . Comme la famille  $(w_1, \dots, w_p)$  est génératrice, pour tout  $x$  de  $E$ , on a alors des scalaires  $x_i$  tels que

$$x = \sum_{i=0}^p x_i w_i = \sum_{i=0}^{p-1} (x_i + x_p \alpha_i) w_i.$$

Cela montre que  $(w_1, \dots, w_{p-1})$  est une famille génératrice. Comme elle ne compte que  $p - 1$  éléments, cela contredit la minimalité de  $p$ . Donc  $(w_1, \dots, w_p)$  est aussi libre : c'est une base.  $\diamond$

Puisqu'un espace vectoriel finiment engendré possède une famille génératrice par définition, on peut en extraire une base.

**COROLLAIRE 5.** *Tout espace vectoriel finiment engendré possède une base.*

Nous pouvons maintenant adopter l'attitude inverse et montrer que toute famille libre est contenue dans une base : c'est le *théorème de la base incomplète*. Commençons par un petit lemme qui contient l'essence du théorème.

**LEMME 3.** *Soit  $(v_1, \dots, v_p)$  une famille libre de l'espace vectoriel  $E$ . Soit un vecteur  $w \in E$  tel que  $w \notin \text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$ . Alors  $(v_1, \dots, v_p, w)$  est une famille libre.*

*Démonstration.* Soient des scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1}$  tels que

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p + \lambda_{p+1} w = 0.$$

Si  $\lambda_{p+1}$  n'est pas nul, on peut écrire  $w = -\sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{\lambda_{p+1}} v_i$ , ce qui contredit l'hypothèse  $w \notin \text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$ . Donc  $\lambda_{p+1} = 0$ . Et la liberté de  $(v_1, \dots, v_p)$  impose alors  $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$ . Donc tous les coefficients sont en fait nuls.  $\diamond$

L'énoncé précis du théorème de la base incomplète est le suivant.

**THÉORÈME 10.** *Soit  $L = (v_1, \dots, v_p)$  une famille libre de l'espace vectoriel  $E$ . Soit  $G = (w_1, \dots, w_q)$  une famille génératrice de  $E$ . On peut alors compléter  $L$  en une base  $(v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+m})$ , en choisissant des vecteurs  $v_{p+i} \in \{w_1, \dots, w_q\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ .*

*Démonstration.* La preuve est un algorithme. On le commence en posant  $L' = L = (v_1, \dots, v_p)$ . C'est une famille libre par hypothèse. Puis on va (éventuellement) modifier  $L'$  au cours des  $q$  étapes suivantes. Pour  $j$  allant de 1 à  $q$  :

- si  $w_j \in \text{Vect } L'$ , on ne fait rien et on passe à l'étape suivante ;
- sinon, on ajoute  $w_j$  à  $L'$ , qui reste une famille libre d'après le lemme ; puis on passe à l'étape suivante avec ce nouveau  $L'$ .

A l'issue de ces opérations, on dispose d'une famille libre

$$L' = (v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+m}),$$

avec  $0 \leq m \leq q$ . Elle est construite de sorte que tous les vecteurs de  $G$  sont dans  $\text{Vect } L'$ . On en déduit que  $\text{Vect } G$  est inclus dans le sous-espace  $\text{Vect } L'$ . Puisque  $G$  est génératrice,  $\text{Vect } G = E$ . On en déduit que  $\text{Vect } L' = E$  : la famille  $L'$  est génératrice. C'est donc une base.  $\diamond$

Nous en arrivons maintenant au point le plus délicat de notre démarche, que l'on pourrait qualifier de *lemme de comparaison*.

LEMME 4. *Si un espace vectoriel  $E$  possède une famille génératrice à  $n$  éléments, alors toute famille d'au moins  $n + 1$  vecteurs est liée.*

*Démonstration.* Elle se fait par récurrence sur  $n$ . L'initialisation, pour  $n = 0$ , est immédiate : dans ce cas,  $E = \{0\}$  et toute famille contenant au moins un élément contient en fait 0, donc est liée.

Pour démontrer l'hérédité, on suppose l'énoncé vrai au rang  $n - 1$ . Et on se donne un espace vectoriel  $E$  avec une famille génératrice  $G = (w_1, \dots, w_n)$  et une famille quelconque  $(v_1, \dots, v_p)$ , avec  $p > n$ . Il s'agit de montrer que  $(v_1, \dots, v_p)$  est liée. Puisque  $G$  est génératrice, on peut écrire pour tout indice  $j = 1, \dots, p$  :

$$v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} w_i,$$

où les  $a_{ij}$  sont des scalaires.

Si tous les coefficients  $a_{nj}$  sont nuls, les vecteurs  $v_1, \dots, v_p$  sont tous dans l'espace vectoriel  $F = \text{Vect}(w_1, \dots, w_{n-1})$  et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence dans  $F$  pour voir que la famille  $(v_1, \dots, v_p)$  est liée.

On peut donc supposer que l'un des coefficients  $a_{nj}$  n'est pas nul. Quitte à renuméroter les vecteurs, on peut même supposer que  $a_{np} \neq 0$ . Alors pour  $j = 1, \dots, p - 1$  :

$$v_j - \frac{a_{nj}}{a_{np}} v_p = \sum_{i=1}^{n-1} \left( a_{ij} - \frac{a_{nj}}{a_{np}} a_{ip} \right) w_i$$

La somme à droite n'a que  $n - 1$  termes puisque le terme pour  $i = n$  est nul par choix des coefficients. Cela montre que les vecteurs  $v_j - \frac{a_{nj}}{a_{np}} v_p$  sont dans  $F = \text{Vect}(w_1, \dots, w_{n-1})$  pour tous les indices  $j = 1, \dots, p - 1$ . Puisque  $p - 1 > n - 1$ , on peut appliquer l'hypothèse de récurrence dans  $F$  pour trouver des scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}$  tels que

$$\sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j \left( v_j - \frac{a_{nj}}{a_{np}} v_p \right) = 0,$$

avec au moins l'un des scalaires  $\lambda_j$  non nuls. Comme cela se réécrit

$$\sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j v_j - \left( \sum_{j=1}^{p-1} \frac{a_{nj}}{a_{np}} \right) v_p = 0,$$

cela montre que la famille  $(v_1, \dots, v_p)$  est liée.  $\diamond$

REMARQUE 43. Au lieu de démontrer ce lemme par récurrence, on peut faire appel à la théorie des systèmes linéaires. Reprenons les notations de la preuve : on a une famille génératrice  $G = (w_1, \dots, w_n)$  et on cherche à prouver que toute famille  $(v_1, \dots, v_p)$  avec  $p > n$  est liée. On cherche donc  $X = (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$  non nul tel que  $\sum_j \lambda_j v_j = 0$ . Si on introduit la matrice  $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$  telle que

$$\forall j = 1, \dots, p, \quad v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} w_i,$$

on voit qu'il suffit d'avoir  $\sum_j a_{ij} \lambda_j = 0$  pour tout indice  $i = 1, \dots, n$ . Il suffit donc de trouver une solution non nulle  $X$  du système linéaire homogène  $AX = 0$ . Or c'est un système de  $n$  équations à  $p$  inconnues, avec  $p > n$  : comme il y a plus d'inconnues que d'équations, il n'y a jamais unicité de la solution (au plus  $n$  variables peuvent être fixées, les  $p - n$  autres étant libres). Il y a donc une solution  $X$  non nulle et la famille est liée.

Ce lemme de comparaison dit qu'une famille libre quelconque a toujours au plus autant d'éléments qu'une famille génératrice quelconque. Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat principal de ce chapitre, qui est une conséquence presque immédiate de ce constat.

### Énoncé indispensable 7 : dimension

Dans un espace vectoriel finiment engendré  $E$ , toutes les bases ont le même nombre d'éléments : on l'appelle la *dimension* de  $E$ .

*Démonstration.* Soient  $B_1$  et  $B_2$  deux bases de  $E$ , comptant respectivement  $n_1$  et  $n_2$  éléments. Par le lemme de comparaison précédent,  $n_1 \leq n_2$ , puisque  $B_2$  est génératrice et  $B_1$  est libre. En inversant les rôles de  $B_1$  et  $B_2$ , on trouve aussi  $n_2 \leq n_1$ . Donc  $n_1 = n_2$ .  $\diamond$

La dimension de  $E$  est notée  $\dim E$  ou parfois  $\dim_{\mathbb{K}}(E)$  si l'on veut préciser les scalaires choisis.

EXEMPLE 43. La base canonique de  $\mathbb{K}^n$  compte  $n$  éléments donc on a bien  $\dim \mathbb{K}^n = n$ .

EXEMPLE 44. La dimension de  $\mathbb{K}_d[X]$  est  $d + 1$ , puisque  $(1, X, \dots, X^d)$  en est une base.

EXEMPLE 45. La dimension de  $M_{n,p}(\mathbb{K})$  est  $np$ . Pour le voir, on note  $E_{kl} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$  la matrice ayant un coefficient 1 en position  $(k, l)$  et des 0 partout ailleurs et on observe que la famille des matrices  $E_{kl}$ , pour  $1 \leq k \leq n$  et  $1 \leq l \leq p$ , constitue une base de  $M_{n,p}(\mathbb{K})$ .

EXEMPLE 46. Attention,  $\mathbb{C}$  est bien un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 1, dont  $(1)$  est une base (tout nombre complexe s'écrit de façon unique  $z = z \cdot 1$ ). Mais c'est aussi un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2, dont  $(1, i)$  est une base (tout nombre complexe s'écrit de façon unique  $x \cdot 1 + y \cdot i$ , avec  $x, y \in \mathbb{R}$ ).

De façon générale, si  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel finiment engendré,  $E$  est aussi un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel finiment engendré et  $\dim_{\mathbb{R}}(E) = 2 \dim_{\mathbb{C}}(E)$ .

Tirons enfin quelques conséquences très utiles des résultats précédents.

PROPOSITION 29. *Dans un espace vectoriel  $E$  de dimension  $d$ ,*

- *une famille libre de  $E$  a au plus  $d$  éléments,*
- *toute famille libre de cardinal  $d$  est une base,*
- *une famille génératrice de  $E$  a au moins  $d$  éléments,*
- *toute famille génératrice de cardinal  $d$  est une base.*

*Démonstration.* On dispose d'une base possédant  $d$  éléments. Le lemme de comparaison dit qu'une famille libre a moins d'éléments qu'une famille génératrice. Puisqu'on dispose d'une famille libre et génératrice à  $d$  éléments, il suit que toute famille libre (resp. génératrice) a moins (resp. plus) de  $d$  éléments. Cela donne la première et la troisième propriétés.

Si une famille libre de cardinal  $d$  n'est pas une base, c'est qu'elle n'est pas génératrice. Le théorème de la base incomplète permet de la compléter en une base, qui aura donc au moins  $d + 1$  éléments, ce qui n'est pas compatible avec la dimension. D'où la deuxième propriété.

Si une famille génératrice de cardinal  $d$  n'est pas une base, c'est qu'elle n'est pas libre. Le théorème de la base extraite permet d'en extraire une base, qui aura donc au plus  $d - 1$  éléments, ce qui n'est pas compatible avec la dimension. D'où la quatrième propriété.  $\diamond$

**1.5. Sous-espaces et dimension.** Commençons par une propriété très naturelle.

THÉORÈME 11. *Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $d$ . Alors tout sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  est finiment engendré, avec  $\dim F \leq d$ . Si de plus  $F$  est de dimension  $d$ , alors  $F = E$ .*

*Démonstration.* Les familles libres de  $F$  sont aussi des familles libres de  $E$ , donc elles ont au plus  $d$  éléments. Notons  $p$  le plus grand cardinal d'une famille libre de  $F$  :  $p \leq d$ . Soit  $(v_1, \dots, v_p)$  une famille libre de  $F$  ayant ce cardinal maximal,  $p$ .

Soit  $w \in F$ . Si  $w \notin \text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$ , la famille  $(v_1, \dots, v_p, w)$  est encore libre d'après le lemme 3, ce qui contredit la maximalité de  $p$ . Donc tout vecteur  $w$  de  $F$  est dans  $\text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$  : la famille  $(v_1, \dots, v_p)$  est génératrice de  $F$ . C'est donc une base de  $F$  :  $\dim F = p \leq d$ .

Si de plus  $\dim F = d$ , on a  $p = d$ , donc  $(v_1, \dots, v_d)$  est une famille libre de  $E$  de cardinal  $d = \dim E$  : c'est une base de  $E$ . Comme c'est aussi une base de  $F$ , il vient  $F = \text{Vect}(v_1, \dots, v_d) = E$ .  $\diamond$

Nous avons vu que l'intersection  $F \cap G$  et la somme  $F + G$  de deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  sont aussi des sous-espaces vectoriels. Si  $F$  et



$G$  sont de dimension finie, leur intersection l'est aussi, comme sous-espace de  $F$  par exemple, et on va voir que leur somme l'est aussi; de plus, une formule relie les dimensions de tous ces sous-espaces.

PROPOSITION 30. *Soit  $E$  un espace vectoriel et  $F, G$  deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de  $E$ . Alors  $F + G$  est de dimension finie et*

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

*Démonstration.* La preuve consiste à produire une base convenable de  $F + G$  en partant d'une base de  $F \cap G$ . Fixons donc une base  $B = (e_1, \dots, e_m)$  de  $F \cap G$ . Puisque c'est une famille libre de  $F$ , on peut la compléter en une base  $B_F = (e_1, \dots, e_m, v_1, \dots, v_p)$  de  $F$ . Puisque c'est aussi une famille libre de  $G$ , on peut la compléter en une base  $B_G = (e_1, \dots, e_m, w_1, \dots, w_q)$  de  $G$ .

Par construction,  $\dim(F \cap G) = m$ ,  $\dim F = m + p$  et  $\dim G = m + q$ . On va montrer que  $B' = (e_1, \dots, e_m, v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q)$  est une base de  $F + G$ . Cela prouvera la formule, puisqu'alors on aura :

$$\dim(F + G) = m + p + q = (m + p) + (m + q) - m = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Pour voir que  $B'$  est génératrice, on prend un vecteur  $x$  de  $F + G$ . Il s'écrit  $x = x_F + x_G$ , avec  $x_F \in F$  et  $x_G \in G$ . Par construction,  $x_F$  (resp.  $x_G$ ) est une combinaison linéaire d'éléments de  $B_F$  (resp.  $B_G$ ). Donc  $x$  est une combinaison linéaire des vecteurs  $e_i, v_j$  et  $w_k$ . Cela prouve que  $B'$  est génératrice.

Pour voir que  $B'$  est libre, on se donne des scalaires  $\lambda_i, \mu_j$  et  $\nu_k$  tels que

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^p \mu_j v_j + \sum_{k=1}^q \nu_k w_k = 0.$$

Alors le vecteur

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^p \mu_j v_j = - \sum_{k=1}^q \nu_k w_k$$

est dans  $F$  (combinaison linéaire des  $e_i$  et  $v_j$ ) mais aussi dans  $G$  (combinaison linéaire des  $w_k$ ). Donc  $x$  est dans  $F \cap G$ , dont une base est  $B$  :

$$x = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i$$

pour certains scalaires  $\alpha_i$ . Mais alors

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i e_i + \sum_{k=1}^q \nu_k w_k = 0$$

et la liberté de la base  $B_G$  montre que les coefficients  $\alpha_i$  et  $\nu_k$  sont nuls. En particulier,  $x = 0$  donc

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^p \mu_j v_j = 0.$$

Par liberté de  $B_F$ , les coefficients  $\lambda_i$  et  $\mu_j$  sont nuls. Ceci prouve que  $B'$  est libre.  $\diamond$

Quand deux sous-espaces  $F$  et  $G$  vérifient  $F \cap G = \{0\}$ , on dit qu'ils sont *en somme directe* et on note leur somme  $F + G = F \oplus G$ . Dans ce cas, la formule ci-dessus se simplifie en :

$$\dim F \oplus G = \dim F + \dim G.$$

Ce n'est pas le seul intérêt de cette notion ! En fait, quand  $F$  et  $G$  sont en somme directe, tout élément  $x$  de  $F + G$  s'écrit de façon *unique*  $x = x_F + x_G$ , avec  $x_F \in F$  et  $x_G \in G$ . En effet, si on a une autre décomposition de ce type,  $x = x'_F + x'_G$ , on a  $x'_F - x_F = x_G - x'_G$ . Le membre de gauche est dans  $F$ , le membre de droite dans  $G$ . Comme ils sont égaux, ils sont tous les deux dans  $F \cap G$ , donc nuls :  $x'_F = x_F$  et  $x'_G = x_G$ .

On y reviendra quand on parlera de projecteurs, puis on généralisera cette notion de somme directe pour bien comprendre la diagonalisation, à la fin de ce cours.

**1.6. Produits d'espaces vectoriels.** Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. On va étudier la structure d'espace vectoriel portée naturellement par leur produit. Rappelons que le produit (ou produit cartésien) des ensembles  $E_1$  et  $E_2$  est l'ensemble

$$E_1 \times E_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\}$$

et que le couple  $(x_1, x_2)$  désigne la donnée d'un élément  $x_1$  de  $E_1$  et d'un élément  $x_2$  de  $E_2$ . Les lois d'espace vectoriel de  $E_1$  et  $E_2$  permettent de définir des lois analogues sur le produit  $E_1 \times E_2$  : pour  $x_1, y_1 \in E_1, x_2, y_2 \in E_2$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on pose

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \quad \text{et} \quad \lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2).$$

On vérifie rapidement que ces lois font de  $E_1 \times E_2$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Par exemple, on peut prendre  $E_1 = \mathbb{R}^p$  et  $E_2 = \mathbb{R}^q$  et le produit est simplement l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^{p+q}$  (essentiellement, la donnée de  $p$  réels et  $q$  réels, c'est la donnée de  $p + q$  réels).

**PROPOSITION 31.** *Si  $E_1$  et  $E_2$  sont deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie,  $E \times F$  est aussi de dimension finie et*

$$\dim(E_1 \times E_2) = \dim E_1 + \dim E_2.$$

*Démonstration.* Soient  $B_1 = (a_1, \dots, a_p)$  une base de  $E_1$  et  $B_2 = (b_1, \dots, b_q)$  une base de  $E_2$ , de sorte que  $p = \dim E_1$  et  $q = \dim E_2$ . La proposition sera démontrée si on vérifie que  $B = ((a_1, 0), \dots, (a_p, 0), (0, b_1), \dots, (0, b_q))$  est une base de  $E_1 \times E_2$ .

Soient des scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q$  tels que

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i (a_i, 0) + \sum_{j=1}^q \mu_j (0, b_j) = 0.$$

La définition des lois fait que le couple  $(\sum_{i=1}^p \lambda_i a_i, \sum_{j=1}^q \mu_j b_j)$  est nul, de sorte que  $\sum_{i=1}^p \lambda_i a_i$  et  $\sum_{j=1}^q \mu_j b_j$  sont nuls. La liberté des familles  $B_1$  et  $B_2$  implique alors que tous les coefficients  $\lambda_i$  et  $\mu_j$  sont nuls. Donc  $B$  est libre.

Soit  $(a, b) \in E_1 \times E_2$ . Comme  $B_1$  et  $B_2$  sont génératrices, il existe des scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q$  tels que  $a = \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i$  et  $b = \sum_{j=1}^q \mu_j b_j$ . Alors :

$$(a, b) = \sum_{i=1}^p \lambda_i (a_i, 0) + \sum_{j=1}^q \mu_j (0, b_j).$$

Cela prouve que  $B$  est une famille génératrice de  $E_1 \times E_2$ .  $\diamond$

REMARQUE 44. On peut noter une ressemblance formelle avec le cas de sommes directes. La différence essentielle est que  $E_1$  et  $E_2$ , dans ce paragraphe, ne sont a priori pas des sous-espaces d'un même espace ambiant... Mais on peut s'y ramener, en introduisant  $E'_1 = E_1 \times \{0\}$  et  $E'_2 = \{0\} \times E_2$ . Ce sont des sous-espaces vectoriels de  $E_1 \times E_2$  dont l'intersection est  $\{0\}$  et la somme est  $E_1 \times E_2$ , par l'identité  $(a, b) = (a, 0) + (0, b)$ . On peut donc toujours écrire :  $E_1 \times E_2 = E'_1 \oplus E'_2$ .

Supposons  $E_1$  et  $E_2$  de dimension finie. Si  $(a_1, \dots, a_p)$  est une base de  $E_1$ , la famille  $((a_1, 0), \dots, (a_p, 0))$  est une base de  $E'_1$ , donc  $E'_1$  est de dimension  $\dim E_1$ . La situation de  $E'_2$  est similaire. D'après le résultat sur les sommes directes,  $E_1 \times E_2$  est donc de dimension  $\dim E'_1 + \dim E'_2 = \dim E_1 + \dim E_2$ .

Si on se donne  $m$   $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels  $E_1, \dots, E_m$ , on peut de même former leur produit

$$E_1 \times \dots \times E_m = \{(x_1, \dots, x_m) \mid x_1 \in E_1, \dots, x_m \in E_m\}$$

et c'est naturellement un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, par une construction analogue. Si chacun des espaces en jeu est de dimension finie, leur produit l'est aussi et on obtient la formule

$$\dim(E_1 \times \dots \times E_m) = \sum_{i=1}^m \dim E_i$$

par une preuve similaire.

On peut vérifier cette formule sur le cas  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ , par exemple.

**1.7. Application aux suites récurrentes d'ordre deux.** Dans ce paragraphe, on va utiliser les notions d'algèbre linéaire développées ci-dessus pour étudier les suites récurrentes d'ordre deux qui sont linéaires et à coefficients constants. On va voir que cela mène à des formules explicites. Concrètement, on se fixe trois nombres complexes  $a, b, c \in \mathbb{C}$  et on suppose que le premier n'est pas nul :  $a \in \mathbb{C}^*$ . Les suites  $(u_n)$  qui nous intéressent sont celles qui vérifient la relation de récurrence

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Par exemple, la suite de Fibonacci est de ce type, avec  $a = 1, b = c = -1$ .

On se place dans l'espace vectoriel  $E$  des suites (à valeurs complexes) et on pose

$$F = \{u = (u_n) \in E / \forall n \in \mathbb{N}, \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0\}.$$

On vérifie aisément que la suite nulle est dans  $F$  et que, pour tous  $u, u' \in F$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , la suite  $u'' = \alpha u + \beta u'$  vérifie, pour tout indice  $n$  :

$$\begin{aligned} au''_{n+2} + bu''_{n+1} + cu''_n &= \alpha (au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n) + \beta (au'_{n+2} + bu'_{n+1} + cu'_n) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Comme  $E$  est de dimension infinie, il n'est pas clair que  $F$  le soit. C'est néanmoins vrai, pour la raison suivante. Chaque élément  $u$  de  $F$  est entièrement déterminé par ses deux premiers termes,  $u_0$  et  $u_1$ . En effet, les termes suivants se calculent de proche en proche par la relation de récurrence  $u_{n+2} = -\frac{b}{a}u_{n+1} - \frac{c}{a}u_n = 0$  : pour  $n = 0$ , on trouve une expression de  $u_2$  en fonction de  $u_0$  et  $u_1$  ; pour  $n = 1$ , c'est  $u_3$  qui se trouve déterminé en fonction de  $u_1$  et  $u_2$ , donc de  $u_0$  et  $u_1$ , etc.

On peut donc définir un élément  $v = (v_n)$  de  $F$  en décidant par exemple que  $v_0 = 1$  et  $v_1 = 0$ . De même, il existe un unique élément  $w$  de  $F$  vérifiant  $w_0 = 0$  et  $w_1 = 1$ .

LEMME 5. *La famille  $(v, w)$  est une base de l'espace vectoriel  $F$ , qui est donc de dimension deux.*

*Démonstration.* Pour montrer que  $(v, w)$  est libre, on suppose que  $\lambda v + \mu w = 0$ , avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ . Cela signifie que  $\lambda v_n + \mu w_n = 0$  pour tout  $n$ . Pour  $n = 0$  et  $n = 1$ , cela donne  $\lambda + 0 = 0$  et  $0 + \mu = 0$ . Donc  $\lambda = \mu = 0$  et on a prouvé que la famille est libre.

Pour montrer que  $(v, w)$  est génératrice, on se donne  $u \in F$  et on observe que la suite  $u' = u_0 v + u_1 w$  est dans  $F$  (combinaison linéaire d'éléments de  $F$ ), donc est entièrement déterminée par ses deux premiers termes. Or le choix de  $v$  et  $w$  fait que  $u'_0 = u_0$  et  $u'_1 = u_1$ . On en déduit que  $u' = u$ , de sorte que  $u$  est une combinaison linéaire de  $v$  et  $w$ . Cela montre que la famille est génératrice.

Ainsi,  $(v, w)$  est une base de  $F$ . L'espace  $F$  possède donc une base comportant deux éléments :  $F$  est de dimension deux.  $\diamond$

On peut remarquer que  $v$  et  $w$  sont calculables dans le cas où  $c = 0$ . Dans ce cas, la relation de récurrence double s'écrit :  $u_{n+2} = -\frac{b}{a}u_{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , c'est-à-dire  $u_{n+1} = -\frac{b}{a}u_n$  pour tout  $n \geq 1$ . On trouve ainsi d'une part  $v_0 = 1$  et  $v_n = 0$  pour tout  $n \geq 1$ , et d'autre part  $w_0 = 0$  puis  $w_n = (-b/a)^{n-1}$  pour tout  $n \geq 1$ .

On va maintenant supposer  $c \neq 0$ . Le problème est alors que la base  $(v, w)$  n'est en général pas explicite : on n'a pas d'expression évidente pour  $v_{176}$ . Pour trouver une base plus pratique, on cherche des éléments  $u = (u_n)$  de  $F$  sous la forme :  $u_n = \lambda^n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Ici,  $\lambda$  est un nombre complexe restant à choisir. Une telle suite  $u$  est dans  $F$  si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a\lambda^{n+2} + b\lambda^{n+1} + c\lambda^n = 0.$$

En factorisant par  $\lambda^n$ , on voit que  $u$  est dans  $F$  dès que  $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ . On introduit donc le trinôme du second degré  $P = aX^2 + bX + c$  et on distingue deux cas, selon son nombre de racines. Observons au passage que 0 n'est pas racine de  $P$  puisqu'on a supposé  $c \neq 0$ .

**Premier cas.** Si  $P$  a deux racines complexes distinctes  $\lambda_+ \neq \lambda_-$  (i.e. si le discriminant n'est pas nul), on pose  $u_{\pm} = (\lambda_{\pm}^n)$ . Montrons que  $(u_+, u_-)$  est une base de  $F$ . Puisque  $F$  est de dimension deux et cette famille compte deux éléments, il suffit de vérifier qu'elle est libre. Or l'équation  $\alpha u_+ + \beta u_- = 0$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ) signifie que  $\alpha \lambda_+^n + \beta \lambda_-^n = 0$  pour tout indice  $n$ . Pour  $n = 0$  et  $n = 1$ , cela donne  $\alpha + \beta = 0$  et  $\alpha \lambda_+ + \beta \lambda_- = 0$ . Donc  $\beta = -\alpha$  et  $\alpha(\lambda_+ - \lambda_-) = 0$ . Comme  $\lambda_+ - \lambda_- \neq 0$ , on en tire  $\alpha = \beta = 0$ . Ainsi,  $(u_+, u_-)$  est une base de  $F$  dans ce cas.

**Second cas.** Si  $P$  a une seule racine complexe  $\lambda$ , le discriminant  $b^2 - 4ac$  est nul et la racine est donnée par  $\lambda = -\frac{b}{2a}$ . Comme dans le premier cas, la suite  $z = (\lambda^n)$  est dans  $F$ . En fait, dans ce cas,  $y = (n\lambda^n)$  est aussi dans  $F$  : pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} ay_{n+2} + by_{n+1} + cy_n &= a(n+2)\lambda^{n+2} + b(n+1)\lambda^{n+1} + cn\lambda^n \\ &= n\lambda^n P(\lambda) + (2a\lambda + b)\lambda^{n+1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Vérifions que la famille  $(y, z)$  est libre, en supposant  $\alpha y + \beta z = 0$ , soit  $(\alpha n + \beta)\lambda^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Pour  $n = 0$ , on trouve directement  $\beta = 0$ . En prenant par exemple  $n = 1$ , on en déduit aussi  $\alpha = 0$ . Donc la famille est libre et constitue même une base de  $F$ , puisqu'elle a le bon nombre d'éléments.

On retiendra le théorème suivant.

### Énoncé indispensable 8 : suites récurrentes d'ordre deux

Soient  $a, b, c \in \mathbb{C}$ , avec  $a \neq 0$  et  $c \neq 0$ , et  $P = aX^2 + bX + c$ . Soit  $(u_n)$  une suite telle que  $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$  pour tout indice  $n$ .

Si  $P$  admet deux racines complexes  $\lambda_+ \neq \lambda_-$ , il existe  $A, B \in \mathbb{C}$  tels que  $u_n = A\lambda_+^n + B\lambda_-^n$  pour tout indice  $n$ .

Si  $P$  admet une seule racine complexe  $\lambda$ , il existe  $A, B \in \mathbb{C}$  tels que  $u_n = (An + B)\lambda^n$  pour tout indice  $n$ .

EXEMPLE 47. Considérons la suite de Fibonacci  $(u_n)$  :  $u_0 = u_1 = 1$  et  $u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = 0$  pour tout  $n$ . Dans ce cas,  $P = X^2 - X - 1$  est de discriminant 5, de sorte qu'on dispose de deux racines  $\lambda_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . On sait donc qu'il existe des constantes  $A$  et  $B$  telles que pour tout  $n$  :  $u_n = A\lambda_+^n + B\lambda_-^n$ . Pour calculer  $A$  et  $B$ , on utilise les données initiales :  $u_0 = u_1 = 1$  se traduit par  $A + B = 1$  et  $A\lambda_+ + B\lambda_- = 1$ . Après calcul, on trouve  $A = \lambda_+/\sqrt{5}$  et  $B = -\lambda_-/\sqrt{5}$ . D'où l'expression :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}.$$

REMARQUE 45. Une situation complètement similaire se présente quand on étudie les équations différentielles d'ordre deux qui sont linéaires et à coefficients constants. Etant donnés  $a \in \mathbb{C}^*$ ,  $b, c \in \mathbb{C}$ , on peut considérer l'ensemble  $F$  des fonctions lisses  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  qui vérifient l'équation différentielle  $ay'' + by' + cy = 0$ . On vérifie aisément que  $F$  est un sous-espace vectoriel de

l'espace vectoriel des fonctions lisses de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ . Et le cours d'analyse du premier semestre montre que  $F$  est de dimension deux, avec une base  $(y_1, y_2)$  s'exprimant en termes des racines du trinôme  $P = aX^2 + bX + c$ . Si  $P$  a deux racines distinctes  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , les fonctions  $y_k : t \mapsto \exp(\lambda_k t)$  conviennent ( $k = 1, 2$ ). Si  $P$  n'a qu'une racine  $\lambda$ , on peut prendre  $y_1 : t \mapsto \exp(\lambda t)$  et  $y_2 : t \mapsto t \exp(\lambda t)$ .

La dimension de  $F$  reflète une propriété générale des solutions aux équations différentielles d'ordre deux : toute solution  $y$  sur un intervalle  $I$  est entièrement déterminée par sa position initiale  $y(t_0)$  et sa vitesse initiale  $y'(t_0)$ , en un temps  $t_0 \in I$ . Les éléments de  $F$  peuvent donc se paramétrer par ces deux nombres : la dimension est deux.

## 2. Applications linéaires

**2.1. Définition et premières propriétés.** On pose  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Une application linéaire entre deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels est une application qui respecte les lois.

### Énoncé indispensable 9 : application linéaire

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Une application  $f$  de  $E$  dans  $F$  est dite linéaire si elle satisfait aux deux conditions suivantes.

- (1) Pour tous vecteurs  $u$  et  $v$  de  $E$ ,  $f(u + v) = f(u) + f(v)$ .
- (2) Pour tout vecteur  $u$  de  $E$  et pour tout scalaire  $\lambda$  de  $\mathbb{K}$ ,  $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ .

Pour insister sur  $\mathbb{K}$ , on dit parfois  $\mathbb{K}$ -linéaire. L'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$  est noté  $L_{\mathbb{K}}(E, F)$  ou  $L(E, F)$ .

On peut noter qu'une application linéaire  $f$  vérifie forcément :

$$f(0) = 0.$$

Cela résulte de la première partie de la définition ci-dessus :  $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$  ; en soustrayant  $f(0)$ , il reste  $0 = f(0)$ . Cela fournit un premier test pour savoir si une application est linéaire ou non. Par exemple, une application constante non nulle ne peut pas être linéaire.

Pour démontrer qu'une application est linéaire, on peut utiliser une propriété plus "concentrée" donnée par la caractérisation suivante.

**PROPOSITION 32** (Caractérisation d'une application linéaire). *Soient  $E$  et  $F$  deux  $K$ -espaces vectoriels et  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ . L'application  $f$  est linéaire si et seulement si, pour tous vecteurs  $u$  et  $v$  de  $E$  et pour tout scalaire  $\alpha$  de  $\mathbb{K}$ ,*

$$f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v).$$

*Démonstration.* Soient  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ ,  $u$  et  $v$  deux vecteurs de  $E$ ,  $\alpha$  un élément de  $\mathbb{K}$ . En utilisant la propriété (1) puis la propriété (2) de la linéarité de  $\mathbb{K}$ , on a

$$\begin{aligned} f(\alpha u + v) &= f(\alpha u) + f(v) \\ &= \alpha f(u) + f(v) \end{aligned}$$

Montrons la réciproque. Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$  telle que, pour tous vecteurs  $u$  et  $v$  de  $E$  et pour tout scalaire  $\alpha$  de  $\mathbb{K}$ ,  $f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v)$ . En faisant  $\alpha = 1$ , on trouve la propriété (1) de la linéarité :  $f(u + v) = f(u) + f(v)$ . Cela implique  $f(0) = 0$  (cf. ci-dessus). En faisant  $v = 0$ , on trouve maintenant :  $f(\alpha u + 0) = \alpha f(u) + f(0)$ , soit  $f(\alpha u) = \alpha f(u)$ , pour tous  $\alpha \in \mathbb{K}$  et  $u \in E$ . La propriété (2) de la linéarité est vérifiée.  $\diamond$

**REMARQUE 46.** Dans la même veine, on montre qu'une application linéaire  $f : E \rightarrow F$  transforme une combinaison linéaire de  $E$  en une autre

combinaison linéaire de  $F$  : pour tous  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  et  $u_1, \dots, u_n \in E$ ,

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(u_i).$$

Beaucoup d'applications naturelles sont linéaires.

EXEMPLE 48. L'application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = x$  est linéaire. En effet, si  $u = (x, y)$  et  $u' = (x', y')$  sont deux éléments de  $\mathbb{R}^2$  et si  $\lambda$  est un réel,

$$\begin{aligned} f(\lambda u + u') &= f(\lambda x + x', \lambda y + y') \\ &= \lambda x + x' \\ &= \lambda f(u) + f(u'). \end{aligned}$$

EXEMPLE 49. Dans l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  (constitué de toutes les fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ), on considère le sous-espace  $D$  constitué des fonctions dérivables. L'application  $d : D \rightarrow E$  définie par  $d(f) = f'$  est linéaire. En effet, si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  et  $\alpha$  un réel,

$$d(\alpha f + g) = (\alpha f + g)' = \alpha f' + g' = \alpha d(f) + d(g).$$

EXEMPLE 50. Considérons l'application de  $M_{n,p}(\mathbb{C})$  dans  $M_{p,n}(\mathbb{C})$  donnée par la transposition :  $T(A) = {}^t A$ . C'est une application linéaire car pour tous éléments de  $M_{n,p}(\mathbb{C})$  et tout scalaire  $\alpha$ ,

$${}^t(\alpha A + B) = {}^t(\alpha A) + {}^t B = \alpha {}^t A + {}^t B.$$

EXEMPLE 51. Soient  $E$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des suites convergentes et  $\lim : E \rightarrow \mathbb{C}$  l'application qui à une suite convergente associe sa limite.  $\lim$  est linéaire puisque, si  $(u_n), (v_n) \in E$  et  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\lim(\alpha u_n + v_n) = \alpha \lim(u_n) + \lim(v_n)$ .

EXEMPLE 52. Soit  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues du segment  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ . L'application  $I : E \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $I(f) = \int_a^b f$  est linéaire puisque, pour tous  $f, g \in E$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\int_a^b (\alpha f + g) = \alpha \int_a^b f + \int_a^b g$ .

EXEMPLE 53. Toute matrice  $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$  définit une application linéaire  $f_A : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$  par simple produit matriciel : pour tout  $X \in \mathbb{K}^p = M_{p,1}(\mathbb{K})$ , on pose  $f_A(X) = AX$ . Sa linéarité provient de la distributivité du produit matriciel : pour tous  $X, Y \in \mathbb{K}^p$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,  $A(\alpha X + Y) = \alpha AX + AY$ .

Par exemple, à la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  est associée l'application  $\mathbb{R}$ -linéaire  $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que

$$f_A(x_1, x_2, x_3) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} = (x_1, x_2 + x_3).$$

Mais certaines applications simples ne sont pas linéaires !

EXEMPLE 54. Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace-vectoriel et  $w$  un vecteur non nul de  $E$ . La translation de vecteur  $w$  est l'application  $\tau : E \rightarrow E$  définie par  $\tau(u) = u + w$ . Cette application n'est pas linéaire parce que  $\tau(0) = w \neq 0$ .



EXEMPLE 55. L'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2$  n'est pas linéaire parce que  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 4$ , donc  $f(2) \neq 2f(1)$ . Cette application  $f$  vérifie en fait pour tous réels  $\lambda$  et  $x$  :  $f(\lambda x) = \lambda^2 f(x)$  – au lieu de  $\lambda f(x)$ . Le même problème surgit quand on regarde l'application  $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , pour  $n \geq 2$  : les propriétés du déterminant donnent  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$  pour tous  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Ceci montre que le déterminant n'est pas linéaire en dimension  $n \geq 2$ . Par exemple,  $\det(2I_n) = 2^n \neq 2 = 2 \det I_n$ .

### Énoncé indispensable 10 : endomorphisme

Soit  $E$  un espace vectoriel. Une application linéaire de  $E$  dans  $E$  est appelée un endomorphisme de  $E$ . On notera  $L(E) = L(E, E)$ .

EXEMPLE 56. Il y a beaucoup d'exemples naturels.

- Une matrice carrée  $A \in M_n(\mathbb{K})$  définit un endomorphisme  $f_A$  de  $\mathbb{K}^n$ .
- La transposition définit un endomorphisme de  $M_n(\mathbb{K})$ .
- La dérivation fournit un endomorphisme de  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , mais aussi de  $\mathbb{R}[X]$ .
- Une rotation du plan centrée en l'origine est un endomorphisme du plan.

EXEMPLE 57. Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace-vectoriel et  $\lambda$  un élément de  $\mathbb{K}$ . L'homothétie de rapport  $\lambda$  est l'application  $h_\lambda : E \rightarrow E$  telle que  $h_\lambda(u) = \lambda u$  pour tout  $u \in E$ . C'est un endomorphisme (par définition d'un espace vectoriel!).

EXEMPLE 58. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace-vectoriel. On suppose que  $E$  est somme directe de deux sous-espaces  $F$  et  $G$  :  $E = F \oplus G$ . Tout vecteur  $u$  de  $E$  s'écrit de façon unique  $u = v + w$  avec  $v$  élément de  $F$  et  $w$  élément de  $G$ . L'unicité de la décomposition précédente permet de définir l'application  $p$  de  $E$  dans  $E$  telle que  $p(u) = v$ . L'application  $p$  est appelée projection sur  $F$  parallèlement à  $G$ . C'est une application linéaire.

En effet, soient deux vecteurs  $u$  et  $u'$  de  $E$ , et deux scalaires  $\alpha, \beta$  deux scalaires de  $\mathbb{K}$ , le vecteur  $u$  s'écrit de façon unique  $u = v + w$  avec  $v$  élément de  $F$  et  $w$  élément de  $G$  et, par définition de  $p$ ,  $p(u) = v$ . De même, le vecteur  $u'$  s'écrit de façon unique  $u' = v' + w'$  avec  $v'$  élément de  $F$  et  $w'$  élément de  $G$  et, par définition de  $p$ ,  $p(u') = v'$ .

$$\alpha u + \beta u' = (\alpha v + \beta v') + (\alpha w + \beta w').$$

$F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , il est donc stable par combinaison linéaire et donc le vecteur  $\alpha v + \beta v'$  appartient à  $F$ . De même le vecteur  $\alpha w + \beta w'$  appartient à  $G$  et, d'après la définition de  $p$ , on a

$$p(\alpha u + \beta u') = \alpha v + \beta v' = \alpha p(u) + \beta p(u').$$

Une projection  $p$  vérifie l'égalité  $p^2 = p$ . En effet, soit  $p$  la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$ , tout vecteur  $u$  de  $E$  s'écrit de façon unique  $u = v + w$  avec  $v$  élément de  $F$  et  $w$  élément de  $G$ . on a alors  $p(u) = v$  et  $p(v) = v$  car  $v = v + 0$  avec  $v$  élément de  $F$  et  $0$  élément de  $G$ . Ainsi

$$p^2(u) = p(p(u)) = p(v) = v = p(u).$$

Un exemple de projection a été vu dans le cours sur les transformations linéaires du plan. Soit  $(\vec{i}, \vec{j})$  un repère (i.e. une base) de l'espace vectoriel  $\mathcal{P}$  des vecteurs du plan. Les droites  $D(\vec{i})$  et  $D(\vec{j})$  sont deux sous espaces supplémentaires de  $\mathcal{P}$ . Et la projection sur  $D(\vec{i})$  parallèlement à  $D(\vec{j})$  n'est autre que la projection vue dans le cours sur les transformations linéaires du plan.

Il est utile de voir que la linéarité se propage bien, par combinaisons linéaires et par composition.

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Rappelons que l'ensemble  $F^E$  de toutes les applications de  $E$  dans  $F$  est naturellement un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel :

- si  $f$  et  $g$  sont deux applications de  $E$  dans  $F$ , on définit  $f+g : E \rightarrow F$  par  $(f+g)(u) = f(u) + g(u)$  pour tout  $u \in E$  ;
- si  $f$  est une application de  $E$  dans  $F$  et  $\lambda$  un élément de  $\mathbb{K}$ , on définit  $\lambda \cdot f : E \rightarrow F$  par  $(\lambda \cdot f)(u) = \lambda f(u)$  pour tout  $u \in E$ .

PROPOSITION 33.  $L(E, F)$  est un sous-espace vectoriel de  $F^E$ .

*Démonstration.* L'application nulle est un élément de  $L(E, F)$ . On veut voir que, pour  $f, g \in L(E, F)$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , les applications  $f+g$  et  $\lambda \cdot f$  sont linéaires. Soient des vecteurs  $u$  et  $v$  de  $E$  et un scalaire  $\alpha$  de  $\mathbb{K}$ .

$$\begin{aligned} (f+g)(\alpha u + v) &= f(\alpha u + v) + g(\alpha u + v) \\ &= \alpha f(u) + f(v) + \alpha g(u) + g(v) \quad (\text{linéarité de } f \text{ et } g) \\ &= \alpha (f(u) + g(u)) + (f(v) + g(v)) \\ &= \alpha (f+g)(u) + (f+g)(v) \end{aligned}$$

Donc  $f+g$  est linéaire.

$$\begin{aligned} (\lambda \cdot f)(\alpha u + v) &= \lambda f(\alpha u + v) \\ &= \lambda (\alpha f(u) + f(v)) \quad (\text{linéarité de } f) \\ &= \alpha \lambda f(u) + \lambda f(v) \\ &= \alpha (\lambda f)(u) + (\lambda f)(v) \end{aligned}$$

Donc  $\lambda \cdot f$  est linéaire. ◇

PROPOSITION 34. Soient  $E, F, G$  trois  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels,  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$  et  $g$  une application linéaire de  $F$  dans  $G$ , alors  $g \circ f$  est une application linéaire de  $E$  dans  $G$ .

En particulier, la composée de deux endomorphismes de  $E$  est un endomorphisme de  $E$ .

*Démonstration.* Soient  $u$  et  $v$  deux vecteurs de  $E$ , et  $\alpha$  un élément de  $\mathbb{K}$ .

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\alpha u + v) &= g(f(\alpha u + v)) \\ &= g(\alpha f(u) + f(v)) \quad (\text{linéarité de } f) \\ &= \alpha g(f(u)) + g(f(v)) \quad (\text{linéarité de } g) \\ &= \alpha g \circ f(u) + g \circ f(v) \end{aligned}$$

◇

**Énoncé indispensable 11 : isomorphisme**

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espace vectoriels. On dit que  $f : E \rightarrow F$  est un isomorphisme si  $f$  est linéaire et bijective.

**PROPOSITION 35** (Linéarité de la réciproque d'un isomorphisme). *Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Si  $f : E \rightarrow F$  est un isomorphisme, alors  $f^{-1} : F \rightarrow E$  est aussi un isomorphisme.*

*Démonstration.*  $f$  étant une application bijective de  $E$  sur  $F$ ,  $f^{-1}$  est une application bijective de  $F$  sur  $E$ . Il reste donc à prouver que  $f^{-1}$  est bien linéaire. Soient  $u'$  et  $v'$  deux vecteurs de  $F$  et soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux éléments de  $\mathbb{K}$ , on pose  $f^{-1}(u') = u$  et  $f^{-1}(v') = v$  et on a alors  $f(u) = u'$  et  $f(v) = v'$ . Comme  $f$  est linéaire, on a

$$f^{-1}(\alpha u' + \beta v') = f^{-1}(\alpha f(u) + \beta f(v)) = f^{-1}(f(\alpha u + \beta v)) = \alpha u + \beta v.$$

Donc  $f^{-1}(\alpha u' + \beta v') = \alpha f^{-1}(u') + \beta f^{-1}(v')$ . Cela prouve que  $f^{-1}$  est linéaire.  $\diamond$

**EXEMPLE 59.** La transposition donne un isomorphisme entre  $M_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $M_{p,n}(\mathbb{K})$ , dont la réciproque est aussi donnée par la transposition.

**EXEMPLE 60.** L'homothétie  $h_\lambda : E \rightarrow E$  est un isomorphisme si  $\lambda \neq 0$ ; sa réciproque est alors  $h_{1/\lambda}$ .

**Test : base et isomorphisme**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni d'une base  $(e_1, \dots, e_n)$ . Vérifier que l'application  $\varphi : \mathbb{K}^n \rightarrow E$  définie par  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  est un isomorphisme.

Quand il existe un isomorphisme  $f : E \rightarrow F$  (ou de  $F$  vers  $E$  : c'est pareil d'après la proposition ci-dessus), on dit que  $E$  et  $F$  sont isomorphes, ou que  $E$  est isomorphe à  $F$ . Typiquement, le test dit qu'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  est toujours isomorphe à  $\mathbb{K}^n$ . C'est un peu le slogan de la théorie de la dimension.

Dans la même veine, si  $f : E \rightarrow F$  est un isomorphisme et si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ ,  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est une base de  $F$  (cf. TD). En particulier, si un espace vectoriel est isomorphe à un espace de dimension finie  $n$ , il est lui aussi de dimension finie  $n$ .

**2.2. Applications linéaires et sous espaces vectoriels.** Si  $f : X \rightarrow Y$  est une application quelconque entre des ensembles quelconques et si  $A$  est une partie de  $X$ , on définit l'image de  $A$  par  $f$  comme étant :

$$f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A, f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

C'est donc une partie de  $Y$ .

Dans la suite, on va se concentrer sur les applications *linéaires* entre deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels  $E$  et  $F$ .

PROPOSITION 36. Si  $f : E \rightarrow F$  est une application linéaire et si  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , alors  $f(A)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .

*Démonstration.* Comme  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , il contient l'élément  $0_E$ , donc  $0_F = f(0_E)$  appartient à  $f(A)$ .

Si  $y_1$  et  $y_2$  sont des éléments de  $f(A)$ , il existe des éléments  $x_1$  et  $x_2$  de  $A$  tels que  $y_1 = f(x_1)$  et  $y_2 = f(x_2)$ . Par linéarité de  $f$ ,

$$y_1 + \alpha y_2 = f(x_1) + \alpha f(x_2) = f(x_1 + \alpha x_2).$$

Or  $x_1 + \alpha x_2$  est un élément de  $A$ , car  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Cela prouve que  $y_1 + \alpha y_2$  est bien un élément de  $f(A)$ .  $\diamond$

Le cas où  $A = E$  est d'usage courant.

### Énoncé indispensable 12 : image

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire. L'image de  $f$ , notée  $\text{Im } f$ , est l'ensemble des valeurs prises par  $f$  :  $\text{Im } f = f(E)$ . C'est un sous-espace vectoriel de  $F$ .

Un autre espace vectoriel naturel est associé à  $f \in L(E, F)$ , cette fois un sous-espace de l'espace de départ  $E$ .

### Énoncé indispensable 13 : noyau

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire. Le noyau de  $f$ , noté  $\text{Ker } f$ , est défini par :

$$\text{Ker } f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

*Démonstration.*  $\text{Ker } f$  contient  $0_E$  puisque  $f(0_E) = 0_F$  par linéarité. Soient  $x_1$  et  $x_2$  deux éléments de  $\text{Ker } f$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$  un scalaire. Pour montrer que  $x_1 + \alpha x_2$  est un élément de  $\text{Ker } f$ , on utilise la linéarité de  $f$  :

$$f(x_1 + \alpha x_2) = f(x_1) + \alpha f(x_2) = 0_F + \alpha 0_F = 0_F.$$

$\diamond$

Bien sûr, par définition,  $f : E \rightarrow F$  est surjective si et seulement si  $\text{Im } f = F$ . Il se trouve qu'on peut caractériser l'injectivité d'une application linéaire par la nature de son noyau.

### Énoncé indispensable 14 : injectivité et noyau

Une application linéaire  $f : E \rightarrow F$  est injective si et seulement si  $\text{Ker } f = \{0_E\}$ .

*Démonstration.* Supposons  $f$  injective et montrons que  $\text{Ker } f = \{0_E\}$ . La linéarité de  $f$  donne  $f(0_E) = 0_F$ . De plus, si  $x$  est un élément de  $E$  tel

que  $x \neq 0_E$ , l'injectivité de  $f$  impose  $f(x) \neq f(0_E)$ , donc  $f(x) \neq 0_F$ . Donc  $\text{Ker } f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\} = \{0_E\}$ .

Supposons maintenant que  $\text{Ker } f = \{0_E\}$ . Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $E$  tels que  $f(x) = f(y)$ . Comme  $f$  est linéaire, on en déduit  $f(x - y) = f(x) - f(y) = 0_F$ , c'est à dire  $x - y$  est un élément de  $\text{Ker } f = \{0_E\}$ . Donc  $x - y = 0_E$ , soit  $x = y$ . Cela montre que  $f$  est injective.  $\diamond$

EXEMPLE 61. Si  $f$  est l'application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie par  $f(x, y) = (x, x, -x)$ , on trouve que l'image et le noyau de  $f$  sont des droites :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, 1, -1)) \quad \text{et} \quad \text{Ker } f = \text{Vect}((0, 1)).$$

$f$  n'est donc ni surjective, ni injective.

EXEMPLE 62. Si  $\lambda \neq 0$ , l'homothétie  $h_\lambda : E \rightarrow E$  est un isomorphisme :  $\text{Im}(h_\lambda) = E$  et  $\text{Ker } h_\lambda = \{0_E\}$ . Par ailleurs, une homothétie de rapport  $\lambda = 0$  est en fait identiquement nulle :  $\text{Im } h_0 = \{0_E\}$  et  $\text{Ker } h_0 = E$ .

EXEMPLE 63. Soit  $p : E \rightarrow E$  la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$ , où  $E = F \oplus G$ . Tout vecteur  $u$  de  $E$  s'écrit d'une manière unique  $u = u_F + u_G$  avec  $u_F$  élément de  $F$  et  $u_G$  élément de  $G$ ; et alors  $p(u) = u_F$ . Le noyau de  $p$  est l'ensemble des vecteurs  $u$  de  $E$  tels que  $u_F = 0$  :  $\text{Ker } p = G$ . L'image de  $p$  est l'ensemble des vecteurs  $u_F$ , quand  $u$  décrit  $E$  : c'est donc une partie de  $F$ ; et si  $u$  est dans  $F$ ,  $u = u_F = p(u)$ , donc  $F \subset \text{Im } p$  et en fait  $\text{Im } p = F$ .

**2.3. Théorème du rang.** Dans ce paragraphe, on étudie les propriétés spécifiques des applications linéaires définies sur un espace vectoriel de dimension finie. Dans ce cas, il y a un lien entre l'image et le noyau d'une même application linéaire.

PROPOSITION 37. Soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire. On suppose que l'espace vectoriel  $E$  est finiment engendré. Alors l'image de  $f$  est un espace vectoriel de dimension finie. Plus précisément, si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , alors  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est une famille génératrice de  $\text{Im } f$ .

*Démonstration.* Il s'agit de démontrer que tout élément de  $\text{Im } f$  est une combinaison linéaire des vecteurs  $f(e_1), \dots, f(e_n)$ .

Si  $y$  est un élément de  $\text{Im } f$ , il existe un élément  $x$  de  $E$  tel que  $y = f(x)$ . Comme  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , il existe des scalaires  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$  tels que  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ . En utilisant la linéarité de  $f$ , on en déduit  $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i)$ , ce qui achève la démonstration.  $\diamond$

Cette proposition montre que l'image de  $f$ , dans ce contexte, a une dimension finie. On lui donne un nom.

DEFINITION 22. Soit  $f \in L(E, F)$ , avec  $E$  finiment engendré. La dimension de l'espace vectoriel  $\text{Im } f$  est appelée rang de  $f$  :  $\text{rg}(f) = \dim \text{Im } f$ .

REMARQUE 47. La proposition ci-dessus donne une famille génératrice de  $\text{Im } f$  de cardinal  $n = \dim E$ . Or le cardinal d'une famille génératrice est

toujours minoré par la dimension :  $\operatorname{rg} f \leq \dim E$ . On peut aussi remarquer que  $\operatorname{Im} f$  est un sous-espace vectoriel de  $F$  : si  $F$  est de dimension finie, on a aussi  $\operatorname{rg} f \leq \dim F$ .

A toute application linéaire  $f : E \rightarrow F$ , on peut associer deux espaces vectoriels naturels : le noyau  $\operatorname{Ker} f$  et l'image  $\operatorname{Im} f$ . Quand  $E$  est finiment engendré, les deux sont finiment engendrés : on vient de le voir pour l'image et le noyau est un sous-espace de l'espace finiment engendré  $E$ . On dispose donc de deux nombres, les dimensions respectives du noyau et de l'image. Or ces deux nombres sont reliés par une formule !

### Énoncé indispensable 15 : théorème du rang

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire. On suppose que l'espace vectoriel  $E$  est finiment engendré. Alors

$$\operatorname{rg} f = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f.$$

Dans la pratique, il suffit donc de déterminer la dimension du noyau ou celle de l'image d'une application linéaire pour avoir les deux dimensions.

*Démonstration.* Notons  $n = \dim E$ . Le noyau de  $f$  est un sous-espace de  $E$  de dimension  $p \leq n$ . Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une base de  $\operatorname{Ker} f$ . D'après le théorème de la base incomplète, il existe  $n - p$  vecteurs  $e_{p+1}, \dots, e_n$  de  $E$  tels que  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ . On va montrer que  $(f(e_{p+1}), \dots, f(e_n))$  est une base de  $\operatorname{Im} f$ . Ainsi, on aura une base de  $\operatorname{Im} f$  possédant  $n - p$  éléments, ce qui donne  $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = n - p = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f$ .

Génératrice ? Soit  $y \in \operatorname{Im} f$ . Comme dans la preuve précédente, on trouve  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  tel que  $y = f(x)$ , de sorte que par linéarité :  $y = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i)$ . Par construction, ici, pour  $i \leq p$ ,  $e_i$  est dans le noyau de  $f$  donc  $f(e_i) = 0$ . Donc en fait  $y = \sum_{i=p+1}^n x_i f(e_i)$ . Cela prouve que  $(f(e_{p+1}), \dots, f(e_n))$  est une famille génératrice de  $\operatorname{Im} f$ .

Libre ? Soient  $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$  des scalaires tels que

$$\lambda_{p+1} f(e_{p+1}) + \dots + \lambda_n f(e_n) = 0.$$

Puisque  $f$  est linéaire, cela implique

$$f(\lambda_{p+1} e_{p+1} + \dots + \lambda_n e_n) = 0,$$

ce qui signifie que le vecteur  $\lambda_{p+1} e_{p+1} + \dots + \lambda_n e_n$  appartient au noyau de  $f$ . Puisque  $(e_1, \dots, e_p)$  est une base de  $\operatorname{Ker} f$ , il existe donc des scalaires  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  tels que  $\lambda_{p+1} e_{p+1} + \dots + \lambda_n e_n = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p$ , ou encore

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p - \lambda_{p+1} e_{p+1} - \dots - \lambda_n e_n = 0.$$

Comme  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , c'est une famille libre. Donc

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_p = -\lambda_{p+1} = \dots = -\lambda_n = 0.$$

En particulier, les  $\lambda_i$  sont nuls et cela assure que  $(f(e_{p+1}), \dots, f(e_n))$  est une famille libre. Finalement, c'est une base de  $\operatorname{Im} f$ .  $\diamond$

Un exercice sain consiste à vérifier que les exemples du paragraphe précédent vérifient bien le théorème du rang.

**COROLLAIRE 6.** *Soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire. On suppose que les espaces vectoriels  $E$  et  $F$  sont finiment engendrés et de **même dimension**. Alors  $f$  est injective si et seulement si elle est surjective, et donc si et seulement si c'est un isomorphisme.*

Autrement dit, dans le cas où les espaces de départ et d'arrivée ont la même dimension, prouver la bijectivité d'une application linéaire se ramène à prouver une seule propriété, injectivité ou surjectivité, et pas les deux. Un résultat de type « existence » (surjectivité) équivaut à un résultat de type « unicité » (injectivité). Par exemple, ceci s'applique quand  $f$  est un endomorphisme.

*Démonstration.* Dire que  $f$  est injective, c'est dire que  $\text{Ker } f = \{0\}$ , i.e.  $\dim \text{Ker } f = 0$ . D'après le théorème du rang, cela veut dire exactement :  $\text{rg } f = \dim E$ . Puisqu'on suppose  $\dim E = \dim F$ , cela revient à :  $\dim \text{Im } f = \dim F$ . Mais  $\text{Im } f$  est un sous-espace de  $F$ , donc cette égalité de dimensions équivaut à l'égalité  $\text{Im } f = F$ , c'est-à-dire à la surjectivité de  $f$ .  $\diamond$

#### 2.4. Traduction matricielle de l'action d'une application linéaire.

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et  $\varphi$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . Le but de ce paragraphe est de traduire l'égalité vectorielle  $y = \varphi(x)$  par une égalité matricielle.

Comme  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie, il possède une base  $B_E = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ , où  $p = \dim E$ . Tout élément  $x$  de  $E$  admet une écriture unique sous la forme :

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_p e_p.$$

Les scalaires  $x_1, \dots, x_p$  sont les coordonnées de  $x$  dans la base  $B_E$ . Leur donnée est équivalente à la donnée de  $x$ . On peut donc repérer  $x$  par la matrice colonne de ses coordonnées dans la base  $B_E$  :

$$[x]_{B_E} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}.$$

De la même façon, on peut introduire une base  $B_F = (f_1, \dots, f_n)$  de  $F$ , où  $n = \dim F$ . Et tout élément  $y$  de  $F$  est repéré par la matrice colonne

$$[y]_{B_F} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

contenant les coordonnées de  $y$  dans la base  $B_F$  :  $y = y_1 f_1 + \dots + y_n f_n$ .

Si  $y = \varphi(x)$ , comment calculer les coordonnées de  $y$  en fonction de celles de  $x$ ? Il suffit en fait de connaître l'action de  $\varphi$  sur les éléments de la base  $B_E$  (comme on va le voir dans la prochaine proposition). Pour  $j = 1, \dots, p$ , on introduit la notation suivante pour les coordonnées de  $\varphi(e_j)$  dans la base

$B_F$  :

$$[\varphi(e_j)]_{B_F} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}.$$

On obtient donc une matrice  $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ , dont la  $j$ -ième colonne contient les coordonnées de  $\varphi(e_j)$  dans la base  $B_F$ .

**Énoncé indispensable 16 : matrice d'une application linéaire**

La matrice de  $\varphi \in L(E, F)$  dans les bases  $B_E$  et  $B_F$  est

$$[\varphi]_{B_F}^{B_E} = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K}),$$

où, pour  $j = 1, \dots, p$ ,

$$\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} f_i.$$

Ici,  $B_E = (e_1, \dots, e_p)$  et  $B_F = (f_1, \dots, f_n)$ . La  $j$ -ième colonne de la matrice  $[\varphi]_{B_F}^{B_E}$  contient les coordonnées de  $\varphi(e_j)$  dans la base  $B_F$ .

REMARQUE 48. Insistons sur le fait que la matrice  $[\varphi]_{B_F}^{B_E}$  comporte  $n$  lignes et  $p$  colonnes, où  $n$  est la dimension de l'espace d'arrivée  $F$  et  $p$  est la dimension de l'espace de départ  $E$ .

L'intérêt de cette matrice est qu'elle permet de calculer les coordonnées de  $y = \varphi(x)$  en fonction de celles de  $x$ , par un simple produit matriciel.

**Énoncé indispensable 17 : traduction matricielle I**

PROPOSITION 38. Soit  $\varphi : E \rightarrow F$  une application linéaire de matrice  $[\varphi]_{B_F}^{B_E}$  dans des bases  $B_E$  de  $E$  et  $B_F$  de  $F$ . Pour tout  $x \in E$ ,

$$[\varphi(x)]_{B_F} = [\varphi]_{B_F}^{B_E} [x]_{B_E}.$$

Si on note  $A$  la matrice de  $\varphi$ ,  $X$  celle des coordonnées de  $x$  et  $Y$  celle des coordonnées de  $\varphi(x)$ , la proposition dit que

$$Y = AX.$$

*Démonstration.* Rappelons les notations :  $B_E = (e_1, \dots, e_p)$ ,  $B_F = (f_1, \dots, f_n)$ ,

$[\varphi]_{B_F}^{B_E} = A = (a_{i,j})$  et  $[x]_{B_E} = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ . Par définition,  $x = \sum_{j=1}^p x_j e_j$ . Avec

la linéarité de  $\varphi$ , on trouve

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{j=1}^p x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^p x_j \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^p x_j \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} f_i\right).$$



En permutant les sommes, on obtient :  $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^p a_{ij} x_j \right) f_i$ . La matrice colonne  $Y$  des coordonnées de  $\varphi(x)$  dans la base  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  est donc 
$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^p a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^p a_{nj} x_j \end{pmatrix}$$
. On reconnaît le produit matriciel  $AX$ .  $\diamond$

Attention, la matrice d'une application dépend complètement des bases choisies, comme on va le voir dans l'exemple suivant.

EXEMPLE 64. Soit  $\varphi$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3).$$

Soient  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $(f_1, f_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Déterminons la matrice associée à  $\varphi$  dans les bases  $(e_1, e_2, e_3)$  et  $(f_1, f_2)$ . On a

$$\varphi(e_1) = \varphi(1, 0, 0) = (1, 1) = f_1 + f_2 = 1f_1 + 1f_2.$$

La première colonne de la matrice  $[\varphi]_{(f_1, f_2)}^{(e_1, e_2, e_3)}$  est donc  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . De même, on a

$$\varphi(e_2) = (1, 0) = f_1 = 1f_1 + 0f_2.$$

La deuxième colonne de la matrice  $[\varphi]_{(f_1, f_2)}^{(e_1, e_2, e_3)}$  est donc  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Enfin on a

$$\varphi(e_3) = (0, 1) = f_2 = 0f_1 + 1f_2.$$

La troisième colonne de la matrice  $[\varphi]_{(f_1, f_2)}^{(e_1, e_2, e_3)}$  est donc  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Il en résulte que

$$[\varphi]_{B_F}^{B_E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Changeons maintenant la base d'arrivée, en permutant ses deux vecteurs : la matrice de  $\varphi$  dans les bases  $(e_1, e_2, e_3)$  et  $(f_2, f_1)$  est

$$[\varphi]_{(f_2, f_1)}^{(e_1, e_2, e_3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On va maintenant changer la base de l'espace de départ et conserver celle de l'espace d'arrivée. Soient les vecteurs  $\varepsilon_1 = (1, 1, 0)$ ,  $\varepsilon_2 = (1, 0, 1)$  et  $\varepsilon_3 = (0, 1, 1)$  de  $\mathbb{R}^3$ . On montre facilement que ces vecteurs déterminent une base de  $\mathbb{R}^3$ . On considère alors les bases  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  et  $(f_1, f_2)$  de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{R}^2$  respectivement. Alors  $\varphi(\varepsilon_1) = 2f_1 + f_2$ ,  $\varphi(\varepsilon_2) = f_1 + 2f_2$ ,  $\varphi(\varepsilon_3) = f_1 + f_2$  et on a

$$[\varphi]_{(f_1, f_2)}^{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

EXEMPLE 65. Soit  $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ . La matrice de l'application linéaire  $f_A : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{K}^p$  et  $\mathbb{K}^n$  est  $A$ .

Dans le cas où  $\varphi$  est un endomorphisme de  $E$ , on peut noter que la matrice de  $\varphi$  sera toujours carrée, de taille  $n = \dim E$ . De plus, il est alors naturel de choisir une seule base  $B$  de  $E$ , qui va servir « au départ et à l'arrivée de  $\varphi$  ». On parle alors de la matrice de  $\varphi$  dans la base  $B$  et on note parfois  $[\varphi]_B = [\varphi]_B^B$ .

EXEMPLE 66. Soit  $B = (e_1, \dots, e_n)$  une base de l'espace vectoriel  $E$ . L'application identité  $\text{id}_E$  est un endomorphisme de  $E$ . Elle vérifie, pour tout  $j = 1, \dots, n$  :

$$\text{id}_E(e_j) = e_j = \sum_{i=1}^n \delta_{ij} e_i.$$

Donc la matrice de l'identité dans toute base  $B$  de  $E$  est la matrice identité :  $[\text{id}_E]_B = I_n$ .

Attention, il arrive parfois qu'on prenne une base différente au départ et à l'arrivée pour calculer la matrice d'un endomorphisme. Typiquement, la matrice de l'identité n'est plus la matrice identité dans ce cas.

On a vu qu'on peut faire des combinaisons linéaires d'applications linéaires, qu'on peut les composer... Comment ces opérations se traduisent-elles matriciellement ?

PROPOSITION 39. Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions respectives  $p = \dim E$  et  $n = \dim F$ , munis de bases  $B_E$  et  $B_F$ . L'application

$$\begin{aligned} \Theta : L(E, F) &\rightarrow M_{n,p}(K) \\ \varphi &\mapsto [\varphi]_{B_F}^{B_E} \end{aligned}$$

est linéaire.

L'application  $\Theta$  associe à une application linéaire sa matrice dans les bases choisies. Concrètement, sa linéarité signifie que, pour  $\varphi, \varphi' \in L(E, F)$ , de matrices respectives  $A$  et  $A'$  dans les bases choisies, et  $\alpha \in \mathbb{K}$ , la matrice de  $\alpha\varphi + \varphi'$  est  $\alpha A + A'$ .

Démonstration. On note encore  $B_E = (e_1, \dots, e_p)$  et  $B_F = (f_1, \dots, f_n)$ . La matrice  $[\varphi]_{B_F}^{B_E} = A = (a_{ij})$  est définie par :

$$\forall j = 1, \dots, p, \quad \varphi(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} f_i.$$

Avec la formule analogue pour  $\varphi'$  (de matrice  $A'$ ), on obtient tout de suite

$$\forall j = 1, \dots, p, \quad (\alpha\varphi + \varphi')(e_j) = \alpha\varphi(e_j) + \varphi'(e_j) = \sum_{i=1}^n (\alpha a_{ij} + a'_{ij}) f_i.$$

Et cela veut dire que  $[\alpha\varphi + \varphi']_{B_F}^{B_E} = \alpha A + A'$ , i.e.  $\Theta(\alpha\varphi + \varphi') = \alpha\Theta(\varphi) + \Theta(\varphi')$ .  $\diamond$

Cette application  $\Theta$  est en fait un isomorphisme entre  $L(E, F)$  et  $M_{n,p}(K)$ . Pourquoi ? On vient de voir que cette application est linéaire. En outre, on a vu plus haut la formule

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^p a_{ij} x_j \right) f_i,$$

toujours avec les mêmes notations, notamment  $\Theta(\varphi) = A = (a_{ij})$ . On voit tout de suite que si  $\Theta(\varphi) = 0$ , les coefficients  $a_{ij}$  sont nuls, donc  $\varphi = 0$ , d'où l'injectivité de  $\Theta$ . Pour voir la surjectivité, on fixe arbitrairement  $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$  et on *définit* l'application  $\varphi$  par cette formule. On vérifie alors que  $\varphi$  est linéaire de matrice  $A$ .

Insistons. Le caractère bijectif de  $\Theta$  signifie que, pour toute matrice  $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ , il existe une unique application linéaire  $\varphi \in L(E, F)$  dont la matrice dans les bases  $B_E$  et  $B_F$  est  $A$ . C'est un moyen de construire des applications linéaires intéressantes.

Cet isomorphisme permet aussi de dire des choses sur l'espace vectoriel  $L(E, F)$  : puisqu'il est isomorphe à  $M_{n,p}(\mathbb{K})$ , il est finiment engendré et sa dimension est  $np = \dim E \times \dim F$ .

On va maintenant voir que la composition des applications linéaires se traduit matriciellement par un simple produit.

### Énoncé indispensable 18 : traduction matricielle II

PROPOSITION 40. Soient  $E, F$  et  $G$  trois  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, munis de bases  $B_E, B_F$  et  $B_G$ . Pour  $\varphi \in L(E, F)$  et  $\varphi' \in L(F, G)$ , on a :

$$[\varphi' \circ \varphi]_{B_G}^{B_E} = [\varphi']_{B_G}^{B_F} [\varphi]_{B_F}^{B_E}.$$

Autrement dit, dans les bases de l'énoncé, la matrice de la composée de deux applications linéaires est le produit des matrices associées à chacune d'elle, dans le même ordre : si  $\varphi$  est de matrice  $A$  et  $\varphi'$  de matrice  $A'$ ,  $\varphi' \circ \varphi$  est de matrice  $A'A$ .

*Démonstration.* Pour tout  $x \in E$ , on peut utiliser deux fois la proposition 38 pour calculer la matrice colonne des coordonnées de  $\varphi'(\varphi(x))$  en fonction de  $X = [x]_{B_E}$  :

$$[\varphi'(\varphi(x))]_{B_G} = A'[\varphi(x)]_{B_F} = A'A[x]_{B_E} = A'AX.$$

Mais, si  $M = [\varphi' \circ \varphi]_{B_G}^{B_E}$ , la proposition 38 donne aussi

$$[(\varphi' \circ \varphi)(x)]_{B_G} = [\varphi' \circ \varphi]_{B_G}^{B_E} [x]_{B_E} = MX.$$

En observant que ces deux choses sont égales, on obtient  $A'AX = MX$ , pour tout  $X \in \mathbb{K}^p$ . Cela implique  $A'A = M$ , c'est-à-dire le résultat.  $\diamond$

EXEMPLE 67. Vérifions la formule sur un exemple simple. On définit  $\varphi \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$  et  $\varphi' \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  par les formules

$$\varphi(x, y) = (x, x + y, 7y) \quad \text{et} \quad \varphi'(x, y, z) = x.$$

La composée est un élément de  $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  et elle vérifie alors  $\varphi' \circ \varphi(x, y) = x$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Par ailleurs, dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{R}$ , les matrices de  $\varphi$  et  $\varphi'$  sont respectivement  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$  et  $(1 \ 0 \ 0)$ . La matrice de  $\varphi' \circ \varphi$  dans les

bases canoniques de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}$  est donc le produit  $(1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = (1 \ 0)$ .

Et le produit de cette matrice par le vecteur colonne  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  donne  $(x)$ , ce qui est cohérent avec le calcul de la composée effectué ci-dessus.

On a vu que la composition des applications linéaires se traduit matriciellement par un produit matriciel. Dans le cas particulier d'un endomorphisme  $\varphi$ , cette proposition ramène donc le calcul des itérés  $\varphi^k = \varphi \circ \cdots \circ \varphi$  à un calcul de puissances matricielles, par une récurrence immédiate.

**COROLLAIRE 7.** *Soit  $\varphi$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$ , muni d'une base  $B$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $[\varphi^k]_B = ([\varphi]_B)^k$ .*

On peut aussi lire la bijectivité d'une application linéaire sur sa matrice.

**COROLLAIRE 8.** *Soient  $E, F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de même dimension, munis de bases  $B_E$  et  $B_F$ . Soit  $\varphi \in L(E, F)$ . L'application  $\varphi$  est un isomorphisme si et seulement si la matrice  $[\varphi]_{B_F}^{B_E}$  est inversible. De plus, dans ce cas,*

$$([\varphi]_{B_F}^{B_E})^{-1} = [\varphi^{-1}]_{B_E}^{B_F}.$$

L'hypothèse  $\dim E = \dim F$  n'est pas une restriction : si elle n'est pas vraie, de toute façon,  $\varphi$  ne peut pas être un isomorphisme et sa matrice ne peut pas être inversible (puisque'elle n'est pas carrée).

*Démonstration.* Soit  $n = \dim E = \dim F$ . Supposons d'abord que  $\varphi$  est un isomorphisme, de sorte qu'on dispose de  $\varphi^{-1} \in L(F, E)$  telle que

$$\varphi^{-1} \circ \varphi = \text{id}_E \quad \text{et} \quad \varphi \circ \varphi^{-1} = \text{id}_F.$$

Donc  $[\varphi^{-1} \circ \varphi]_{B_E} = [\text{id}_E]_{B_E} = I_n$  et  $[\varphi \circ \varphi^{-1}]_{B_F} = [\text{id}_F]_{B_F} = I_n$ . Comme la matrice de la composée est le produit des matrices, on en tire :

$$[\varphi^{-1}]_{B_E}^{B_F} [\varphi]_{B_F}^{B_E} = I_n \quad \text{et} \quad [\varphi]_{B_F}^{B_E} [\varphi^{-1}]_{B_E}^{B_F} = I_n.$$

Cela prouve que la matrice  $[\varphi]_{B_F}^{B_E}$  est inversible et que son inverse est la matrice  $[\varphi^{-1}]_{B_E}^{B_F}$ .

Démontrons maintenant la réciproque en supposant que  $A = [\varphi]_{B_F}^{B_E}$  est inversible. Soit  $\psi$  l'application linéaire de  $F$  dans  $E$  dont la matrice dans les bases  $B_F$  et  $B_E$  est  $A^{-1}$ . Alors l'égalité  $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$  peut s'écrire

$$[\varphi]_{B_F}^{B_E} [\psi]_{B_E}^{B_F} = I_n \quad \text{et} \quad [\psi]_{B_E}^{B_F} [\varphi]_{B_F}^{B_E} = I_n,$$

ce qui implique

$$[\psi \circ \varphi]_{B_E} = [\text{id}_E]_{B_E} \quad \text{et} \quad [\varphi \circ \psi]_{B_F} = [\text{id}_F]_{B_F}$$

Deux applications linéaires ayant la même matrice dans les mêmes bases sont égales :  $\psi \circ \varphi = \text{id}_E$  et  $\varphi \circ \psi = \text{id}_F$ . Cela prouve que  $\varphi$  est bijective, de réciproque  $\psi$ , de sorte que c'est un isomorphisme.  $\diamond$

**2.5. Changement de base.** On a vu qu'en dimension finie on peut ramener les problèmes d'algèbre linéaire à des calculs matriciels, *une fois qu'on a choisi des bases des espaces vectoriels en jeu*. Nous allons maintenant examiner ce qui se passe quand on change de bases.

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ . On considère deux bases de  $E$  :  $B = (e_1, \dots, e_n)$  et  $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ . Tout élément  $x$  de  $E$  admet des coordonnées dans chacune de ces bases :

$$X = [x]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X' = [x]_{B'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Le lien entre  $X$  et  $X'$  s'établit à l'aide d'une matrice, dite de passage.

### Énoncé indispensable 19 : matrice de passage

La matrice de passage de la base  $B$  à la base  $B'$  est la matrice  $P_{BB'} = (p_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$  dont la  $j$ -ième colonne est  $[e'_j]_B$ , pour  $1 \leq j \leq n$ . Autrement dit :

$$e'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} e_i.$$

On peut retenir que  $P_{BB'}$  est la matrice des vecteurs de  $B'$  dans la base  $B$ . Ses colonnes donnent les coordonnées des vecteurs de  $B'$  dans la base  $B$ .

EXEMPLE 68. Soit l'espace vectoriel réel  $\mathbb{R}^2$ . On considère la base canonique  $B = (e_1, e_2)$  et la base  $B' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  avec  $\varepsilon_1 = e_1 + e_2$  et  $\varepsilon_2 = e_2$ . La matrice de passage de la base  $B$  à la base  $B'$  est la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  dont la première colonne est donnée par les coordonnées du vecteur  $\varepsilon_1$  sur la base  $(e_1, e_2)$  et la deuxième par les coordonnées  $\varepsilon_2$  de sur la base  $(e_1, e_2)$ .

Cette matrice de passage fait la traduction entre les coordonnées obtenues dans chacune des deux bases, par un simple produit matriciel.

### Énoncé indispensable 20 : changement de base I

Les matrices d'un vecteur  $x$  dans deux bases  $B$  et  $B'$  sont reliées par la formule :

$$[x]_B = P_{BB'} [x]_{B'}.$$

Avec les notations introduites ci-dessus, cela signifie  $X = P_{BB'} X'$  : cette formule exprime naturellement les « anciennes » coordonnées (dans  $B$ ) en fonction des « nouvelles » (dans  $B'$ ).

*Démonstration.* Par définition des coordonnées et de  $P_{BB'} = (p_{ij})$ ,

$$x = \sum_{j=1}^n x'_j e'_j = \sum_{j=1}^n x'_j \left( \sum_{i=1}^n p_{ij} e_i \right) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n p_{ij} x'_j \right) e_i.$$

Cela signifie que la coordonnée  $x_i$  de  $x$  dans la base  $B = (e_1, \dots, e_n)$  est  $x_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} x'_j$  et prouve que  $X = P_{BB'} X'$ .  $\diamond$

PROPOSITION 41. *Toute matrice de passage  $P_{BB'}$  est inversible, d'inverse  $P_{B'B}$ .*

*Démonstration.* Pour  $x \in E$ , on note encore  $X = [x]_B$  et  $X' = [x]_{B'}$ . On vient de voir que  $X = P_{BB'} X'$ . En inversant les rôles de  $B$  et  $B'$ , on obtient aussi  $X' = P_{B'B} X$ . On en déduit que  $X = P_{BB'} P_{B'B} X$ , pour tout  $X \in \mathbb{K}^n$ . D'où  $P_{BB'} P_{B'B} = I_n$  et le résultat.  $\diamond$

REMARQUE 49. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni d'une base  $B = (e_1, \dots, e_n)$ . Toute matrice inversible  $M = (m_{ij}) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  définit une nouvelle base de  $E$ . Explicitement, pour  $j = 1 \dots, n$ , on pose  $e'_j = \sum_{i=1}^n m_{ij} e_i$ . Alors  $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$  est une base de  $E$  : sinon, ce serait une famille liée, ce qui donnerait une solution  $X$  non nulle au système  $MX = 0$ , contredisant l'inversibilité de  $M$ . On peut aussi le voir en introduisant l'endomorphisme  $\varphi$  de  $E$  dont la matrice dans  $B$  est  $M$  : en fait,  $B' = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$  et  $\varphi$  est un isomorphisme parce que  $M$  inversible ; ainsi,  $B'$  est une base, comme image d'une base par un isomorphisme. Bien sûr, par construction,  $M = P_{BB'}$ .

THÉORÈME 12. *Soit  $\varphi$  une application linéaire entre deux espaces vectoriels  $E$  et  $F$ . Soient  $B_E$  et  $B'_E$  deux bases de  $E$ ,  $B_F$  et  $B'_F$  deux bases de  $F$ . On introduit les matrices de passage  $P = P_{B_E B'_E}$  et  $Q = P_{B_F B'_F}$ . Alors :*

$$[\varphi]_{B_F}^{B'_F} = Q [\varphi]_{B'_E}^{B_E} P^{-1}.$$

Si  $A$  est la matrice de  $\varphi$  dans les « anciennes » bases ( $B_E$  et  $B_F$ ) et  $A'$  la matrice dans les « nouvelles » (avec des primes), la formule est donc

$$A = Q A' P^{-1}.$$

*Démonstration.* C'est un jeu de notations avec ce qui précède. Pour  $x \in E$ , on note toujours  $X = [x]_{B_E}$  et  $X' = [x]_{B'_E}$ . Alors  $[\varphi(x)]_{B_F} = AX$  et  $[\varphi(x)]_{B'_F} = A'X'$ . La formule de passage entre  $B_F$  et  $B'_F$  donne donc  $AX = Q A' X'$ . Et la formule de passage entre  $B_E$  et  $B'_E$  donne  $X = P X'$ . On en tire  $AX = Q A' P^{-1} X$ , pour tout  $X$ , donc  $A = Q A' P^{-1}$ .  $\diamond$

Le cas particulier d'un endomorphisme mérite d'être explicité. Il est très important, par exemple pour la diagonalisation, qui est le prochain sujet de ce cours.

### Énoncé indispensable 21 : changement de base II

Soient  $B$  et  $B'$  deux bases d'un espace vectoriel  $E$ . Soit  $\varphi$  un endomorphisme de  $E$ . Alors :

$$[\varphi]_B = P_{BB'} [\varphi]_{B'} P_{BB'}^{-1}.$$

On retiendra cette formule sous la forme

$$A = PA'P^{-1},$$

où  $A$  est la matrice de  $\varphi$  dans  $B$ ,  $A'$  la matrice de  $\varphi$  dans  $B'$  et  $P$  est la matrice de passage de  $B$  à  $B'$ , c'est-à-dire la matrice des coordonnées des vecteurs de la base  $B'$  dans la base  $B$ .

REMARQUE 50. La matrice de passage entre deux bases  $B$  et  $B'$  de  $E$  peut s'interpréter comme la matrice de  $\text{id}_E$ , avec  $B'$  comme base de départ et  $B$  comme base d'arrivée :

$$P_{BB'} = [\text{id}_E]_B^{B'}$$

Attention à l'ordre : c'est bien  $B'$  au départ et  $B$  à l'arrivée. La preuve est immédiate : la  $j$ -ième colonne de  $[\text{id}_E]_B^{B'}$  est  $[\text{id}_E(e'_j)]_B = [e'_j]_B$ , soit celle de  $P_{BB'}$ .

Ce point de vue, si on fait bien attention à l'ordre des bases, permet de se ramener aux propriétés des matrices d'applications linéaires. Par exemple, la proposition 38 donne, pour tout  $x \in E$ ,  $P_{BB'}[x]_{B'} = [\text{id}_E]_B^{B'}[x]_{B'} = [\text{id}_E(x)]_B = [x]_B$ . Également, puisque  $P_{BB'} = [\text{id}_E]_B^{B'}$  est la matrice d'un isomorphisme, c'est une matrice inversible, d'inverse  $[\text{id}_E^{-1}]_{B'}^B = [\text{id}_E]_{B'}^B = P_{B'B}$ . Enfin, la formule de changement de bases pour les endomorphismes se voit en écrivant :

$$P_{BB'}[\varphi]_{B'}P_{BB'}^{-1} = [\text{id}_E]_B^{B'}[\varphi]_{B'}[\text{id}_E]_{B'}^B = [\text{id}_E \circ \varphi \circ \text{id}_E]_B^B = [\varphi]_B.$$

La formule de changement de base permet de parler du déterminant d'un endomorphisme. En effet, si  $A$  et  $A'$  sont les matrices d'un même endomorphisme  $\varphi$  dans deux bases différentes, on peut écrire  $A = PA'P^{-1}$  pour une certaine matrice de passage  $P$ . Comme le déterminant d'un produit est le produit des déterminants, il vient :

$$\det(A) = \det(PA'P^{-1}) = \det(P) \det(A') \frac{1}{\det(P)} = \det(A').$$

Donc le déterminant ne dépend pas de la base choisie : on peut poser  $\det(\varphi) = \det(A)$ , où  $A$  est la matrice de  $\varphi$  dans n'importe quelle base.

On peut faire la même construction avec la trace. Rappelons que la trace  $\text{Tr } A$  d'une matrice carrée  $A$  est la somme de ses coefficients diagonaux. En utilisant la définition du produit matriciel, on vérifie la formule

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{K}), \quad \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA).$$

Ainsi, la trace d'un produit de matrices ne dépend pas de l'ordre dans lequel on fait le produit.

Si  $A$  et  $A'$  sont les matrices d'un même endomorphisme  $\varphi$  dans deux bases différentes, on peut écrire  $A = PA'P^{-1}$  comme ci-dessus et alors

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(PA'P^{-1}) = \text{Tr}(A'P^{-1}P) = \text{Tr}(A').$$

Donc la trace ne dépend pas de la base choisie : on peut poser  $\text{Tr}(\varphi) = \text{Tr}(A)$ , où  $A$  est la matrice de  $\varphi$  dans n'importe quelle base.

### 3. Diagonalisation

#### 3.1. Motivation.

3.1.1. *Motivation pour praticiens.* On s'intéresse au problème suivant : étant donnée la matrice  $M = \begin{pmatrix} 1,9 & 0,9 \\ -1,8 & -0,8 \end{pmatrix}$ , calculer la matrice  $M^{100}$ .

L'un des buts de cette sous-section est d'expliquer *comment* résoudre un tel problème. Disons d'abord un mot de *pourquoi*. Il arrive qu'un système physique dépende d'un nombre fini  $> 1$  de paramètres ; qu'un processus physique « en temps discret » soit une transformation linéaire de ces paramètres. Si nous notons  $M$  la matrice de cette transformation et  $x_n$  le vecteur des paramètres au temps  $n$ , on aura  $x_{n+1} = M \cdot x_n$ . La question du devenir à long terme du système revient à comprendre le comportement de  $M^n \cdot x_0$  quand  $n$  tend vers l'infini.

L'approche naïve qui consisterait à chercher des relations de récurrence entre les coefficients des  $M^n$  est une re-complication du problème : l'algèbre linéaire permet précisément de noter les choses matriciellement, avec plus de clarté et plus d'outils.

Or calculer les puissances d'une matrice *diagonale* est simple. *On veut donc se ramener au cas diagonal.* On pourrait songer à utiliser l'algorithme du pivot de Gauss, qui permettrait d'écrire  $M = PD$  où  $D$  est diagonale. Mais l'écriture  $M^n = (PD)^n$  ne permet pas d'aller plus loin. En revanche, si l'on peut écrire  $M = PDP^{-1}$  avec  $D$  diagonale, alors :

$$M^n = (PDP^{-1})^n = PD \underbrace{P^{-1} \cdot P}_{I_n} D \underbrace{P^{-1} \cdot P}_{I_n} D \cdots PDP^{-1} = PD^n P^{-1}.$$

Cette écriture donne une réponse explicite, puisque  $D^n$  se calcule facilement.

*Diagonaliser une matrice, c'est se ramener par changement de base à une matrice diagonale.*

3.1.2. *Motivation pour théoriciens.* Une application linéaire générale est un objet impossible à se figurer (pour « tracer » un endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$ , il faudrait disposer de  $n^2$  dimensions) et dont la représentation algébrique sous forme de matrice, certes utile en calcul, est assez opaque.

Mais il y a des applications linéaires plus simples que d'autres. Par exemple, l'identité. Ou encore une homothétie. Mais c'est bien trop spécifique. On peut aussi imaginer le cas où selon un axe on multiplierait par un scalaire, et selon un autre axe, par un autre scalaire. En étude le long des axes, la transformation de l'espace serait grandement simplifiée.

*Diagonaliser une application linéaire, c'est trouver une famille génératrice de droites le long desquelles elle agit comme une homothétie.*

**3.2. Éléments propres.** On se place dans un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Une droite  $D$  de  $E$  est par définition un sous-espace de dimension 1. Si  $x \in D$  n'est pas nul,  $(x)$  est une base de  $D$  et  $D = \text{Vect}(x)$ .

DEFINITION 23. Une droite  $D$  de  $E$  est dite *propre* si elle est stabilisée par  $f$ , c'est-à-dire si :  $\forall y \in D, \quad f(y) \in D$ .

C'est intéressant car alors la restriction  $f|_D$  est un endomorphisme de la droite  $D$ .



LEMME 6. Soient  $D$  un espace vectoriel de dimension 1 et  $g : D \rightarrow D$  une application linéaire. Alors il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $g = \lambda \text{id}_D$ .

*Démonstration.* Fixons  $x_0 \in D \setminus \{0\}$ , de sorte que  $\text{Vect}(x_0) = D$ . Notamment il existe  $\lambda$  (éventuellement nul) tel que  $g(x_0) = \lambda x_0$ . Nous affirmons que  $g$  est l'homothétie de rapport  $\lambda$ . Soit en effet  $x \in D$  quelconque. Puisque  $\text{Vect}(x_0) = D$ , il existe un scalaire  $\mu$  tel que  $x = \mu x_0$ , et l'on trouve :

$$g(x) = g(\mu x_0) = \mu g(x_0) = \mu \lambda x_0 = \lambda \mu x_0 = \lambda x,$$

d'où le résultat.  $\diamond$

Ce calcul montre d'ailleurs que si un vecteur  $x_0 \neq 0$  vérifie  $f(x_0) = \lambda x_0$ , la droite  $D = \text{Vect}(x_0)$  est propre et la restriction  $f|_D$  est l'homothétie de rapport  $\lambda$ .

### Énoncé indispensable 22 : vecteur propre et valeur propre

Soit  $f \in L(E)$ . Si on a un vecteur  $x \in E$  non-nul et un scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  tels que  $f(x) = \lambda x$ , on dit que  $\lambda$  est une *valeur propre* de  $f$  et que  $x$  est un *vecteur propre* de  $f$  associé à  $\lambda$ .

Une valeur propre est donc un scalaire  $\lambda$  tel qu'il existe une droite  $D$  pour laquelle  $f|_D = \lambda \text{id}_D$ . Et un vecteur propre est donc un vecteur qui engendre une droite propre. Comme le vecteur 0 n'engendre que  $\{0\}$ , il ne saurait compter parmi les vecteurs propres.

DEFINITION 24. Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$ , on appelle *espace propre* de  $f$  associé à  $\lambda$  le sous-espace vectoriel  $E_\lambda(f) = \text{Ker}(f - \lambda \text{id})$ .

Ce n'est pas forcément une droite. Ainsi, pour  $f = \text{id}$ , on a  $E_1(f) = E$ . Par construction,  $E_\lambda(f)$  est le plus grand espace sur lequel  $f$  se comporte comme l'homothétie de rapport  $\lambda$ .

DEFINITION 25. On appelle *spectre* d'un endomorphisme  $f$  l'ensemble de ses valeurs propres. Il est noté  $\text{Sp}(f)$ .

Le spectre admet une caractérisation algébrique remarquable, liée au polynôme suivant.

### Énoncé indispensable 23 : polynôme caractéristique

Soit  $M = (m_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$  une matrice carrée. Son *polynôme caractéristique* est par définition<sup>1</sup> :

$$\chi_M(X) = \det(M - XI_n) = \begin{vmatrix} m_{11} - X & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} - X & \dots & m_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ m_{n1} & & & m_{nn} - X \end{vmatrix}.$$

Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$ , de matrice  $M$  dans une base de  $E$ . Son polynôme caractéristique est  $\chi_f = \chi_M$ .

Les propriétés du déterminant font que le polynôme caractéristique est un polynôme de degré  $n$ , s'écrivant

$$\chi_M(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \operatorname{Tr}(M) X^{n-1} + \dots + \det(M).$$

Cela se voit par exemple par récurrence, en développant le déterminant par rapport à la première colonne. Le terme constant est bien sûr  $\chi_M(0) = \det(M)$ .

Pour comprendre, la définition du polynôme caractéristique de l'endomorphisme  $f$ , il faut se rappeler que le déterminant d'un endomorphisme est bien défini : c'est le déterminant de la matrice associée dans n'importe quelle base, le résultat ne dépendant pas de la base choisie (voir la fin du paragraphe sur les changements de base). En particulier, si  $M$  et  $N$  représentent le même endomorphisme  $f$  dans deux bases différentes, alors

$$\chi_M = \det(M - XI_n) = \det(N - XI_n) = \chi_N,$$

puisque  $M - XI_n$  et  $N - XI_n$  représentent le même endomorphisme  $f - X \operatorname{id}$ . En fait,  $\chi_f = \det(f - X \operatorname{id})$ . C'est un polynôme de degré  $n = \dim(E)$ .

### Énoncé indispensable 24 : racines du polynôme caractéristique

Les valeurs propres de  $f$  sont exactement les racines de son polynôme caractéristique.

*Démonstration.* Soit  $M$  la matrice de  $f$  dans une base. Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Alors  $\lambda$  est valeur propre si et seulement s'il existe  $x \neq 0$  tel que  $f(x) = \lambda x$  i.e.  $(f - \lambda \operatorname{id})(x) = 0$ . Cela signifie que le noyau de  $f - \lambda \operatorname{id}$  n'est pas  $\{0\}$ , c'est-à-dire que l'endomorphisme  $f - \lambda \operatorname{id}$  n'est pas injectif. Cela équivaut à dire que ce n'est pas un isomorphisme, ou encore que sa matrice  $M - \lambda I_n$  n'est pas inversible, soit  $\det(M - \lambda \operatorname{id}) = 0$  i.e.  $\chi_f(\lambda) = 0$ .  $\diamond$

Le degré du polynôme caractéristique étant la dimension, on voit qu'en dimension  $n$ , il y a au plus  $n$  valeurs propres.

Le théorème de D'Alembert-Gauss dit que tout polynôme complexe admet une racine complexe : si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , le polynôme caractéristique a toujours au moins une racine, donc tout endomorphisme admet une valeur propre donc une droite propre. Géométriquement, ce n'est pas clair du tout ! D'ailleurs, c'est complètement faux si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  : une rotation  $\rho \neq \pm \operatorname{id}$  de  $\mathbb{R}^2$  n'a pas de direction propre (puisque « tout tourne »), donc pas de valeur propre réelle. On voit ici que la nature algébrique de  $\mathbb{K}$  joue un rôle crucial.

### 3.3. Diagonalisabilité.

#### Énoncé indispensable 25 : endomorphisme diagonalisable

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. Un endomorphisme  $f$  de  $E$  est *diagonalisable* s'il existe une base  $B$  de  $E$  formée de vecteurs propres.

Cela revient à dire que la matrice de  $f$  dans la base  $B$  est diagonale.

Explicitement, si  $B = (x_1, \dots, x_n)$  et si chaque  $x_i$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_i$ ,

$$[f]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, chacune des droites  $D_i = \text{Vect}(x_i)$  est propre et  $E$  est la somme de ces  $n$  droites, elles engendrent tout l'espace.

La formule de changement de base mène au concept matriciel correspondant.

### Énoncé indispensable 26 : matrice diagonalisable

Une matrice  $M \in M_n(\mathbb{K})$  est *diagonalisable* s'il existe une matrice inversible  $P$  et une matrice diagonale  $D$  telles que  $M = PDP^{-1}$ .

### Test : diagonalisabilité

Soit  $f$  un endomorphisme. Montrer l'équivalence entre :

- $f$  est diagonalisable ;
- il existe une base  $B$  telle que  $[f]_B$  soit diagonalisable ;
- pour toute base  $B$ ,  $[f]_B$  est diagonalisable.

LEMME 7. Soit  $f \in L(E)$ . Soient  $x_1, \dots, x_p$  des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes : pour tout  $i$ ,  $f(x_i) = \lambda_i x_i$ , avec  $\lambda_i \neq \lambda_j$  si  $i \neq j$ . Alors  $(x_1, \dots, x_p)$  est une famille libre.

*Démonstration.* Procédons par récurrence sur  $p \in \mathbb{N}^*$ .

Initialisation. Puisque  $x_1$  est un vecteur propre,  $x_1$  n'est pas nul, donc  $(x_1)$  est libre.

Hérédité. Supposons que  $(x_1, \dots, x_{p-1})$  est libre et que  $\sum_{i=1}^p \alpha_i x_i = 0$  pour des scalaires  $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ . En appliquant  $f$ , on obtient une autre équation :

$$0 = f(0) = f\left(\sum_{i=1}^p \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^p \alpha_i f(x_i) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \alpha_i x_i.$$

En multipliant l'équation initiale par  $\lambda_p$ , on trouve aussi  $0 = \sum_{i=1}^p \lambda_p \alpha_i x_i$ . En soustrayant ces deux équations, on annule le dernier terme et on trouve

$$0 = \sum_{i=1}^{p-1} (\lambda_i - \lambda_p) \alpha_i x_i.$$

Puisque la famille  $(x_1, \dots, x_{p-1})$  est libre par hypothèse de récurrence, on en déduit  $(\lambda_i - \lambda_p) \alpha_i = 0$  pour  $i = 1, \dots, p-1$ . Puisque les valeurs propres sont distinctes,  $\lambda_i - \lambda_p \neq 0$ , donc  $\alpha_i = 0$ , pour  $i = 1, \dots, p-1$ . Et l'équation initiale donne alors  $\alpha_p x_p = 0$ , donc  $\alpha_p = 0$  ( $x_p$  n'est pas nul : c'est un vecteur

propre). Cela prouve que  $(x_1, \dots, x_p)$  est une famille libre, et donc le lemme, par récurrence.  $\diamond$

### Énoncé indispensable 27 : un critère de diagonalisabilité

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Si  $\chi_f$  admet  $n$  racines distinctes dans  $\mathbb{K}$ , alors  $f$  est diagonalisable.

L'hypothèse sur le polynôme caractéristique consiste à dire qu'il est « scindé à racines simples » :  $\chi_f = (-1)^n \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$ , où les  $\lambda_i$  sont des éléments *distincts* de  $\mathbb{K}$ .

*Démonstration.* Comme  $\chi_f$  possède exactement  $n$  racines distinctes, il suit que  $f$  possède exactement  $n$  valeurs propres distinctes. En choisissant un vecteur propre pour chacune d'entre elles, on obtient  $n$  vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes. On trouve ainsi une famille libre (lemme) donc une base ( $n = \dim E$ ), constituée de vecteurs propres.  $\diamond$

#### REMARQUES 6.

- Cette condition n'est pas nécessaire : la réciproque est fausse. Par exemple, l'endomorphisme  $\text{id}_{\mathbb{C}^n}$  de  $\mathbb{C}^n$  est bien sûr diagonalisable et son polynôme caractéristique est  $(1 - X)^n$ , qui n'a qu'une racine, 1, de multiplicité  $n$ .
- Si ce critère ne s'applique pas toujours, il s'applique quand même souvent ! Quand  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , il n'est jamais loin d'être vérifié : on peut montrer que toute matrice carrée complexe peut être approchée aussi près qu'on veut par des matrices vérifiant ce critère, donc diagonalisables.

Résumons-nous, en insistant sur le côté pratique. Une matrice carrée  $M$  est *diagonalisable* s'il existe un changement de base la rendant diagonale, en notation :

$$M = PDP^{-1}.$$

Comment calculer les termes de cette formule ?

- (1) Déterminer les valeurs propres : il s'agit d'écrire le polynôme caractéristique et de trouver ses racines.

*Remarque : en vérité, c'est beaucoup plus facile à dire qu'à faire. Trouver les racines d'un polynôme, les exprimer par des opérations algébriques élémentaires... ça va si la matrice est de taille au plus 4 (depuis la Renaissance italienne, on connaît même des formules). Mais, en plus grande dimension, on sait depuis Abel-Ruffini (on sait même pourquoi depuis Galois) qu'on ne peut pas exprimer les racines de polynômes arbitraires.*

Mais tenons pour connu le spectre.

- (2) Déterminer les espaces propres et une base de chacun d'entre eux : c'est une histoire de systèmes linéaires. Pour  $\lambda \in \text{Sp}(f)$ , il s'agit de résoudre le système  $MX = \lambda X$  d'inconnue  $X \in \mathbb{K}^n$ , par les méthodes de pivot habituelles, qui en donnent notamment une base.

- (3) Ecrire la formule de changement de base : si l'on a obtenu en tout  $n$  vecteurs-colonnes propres  $X_1, \dots, X_n$  linéairement indépendants, on forme la matrice de passage  $P$  en les mettant côte-à-côte. La formule de changement de base donne :

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1},$$

où, pour tout  $j$ ,  $MX_j = \lambda_j X_j$ .

*Vérifions.* En notant  $E_j$  le  $j$ -ième vecteur-colonne de la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ , on a  $X_j = P \cdot E_j$  par définition de  $P$ . Comme  $MX_j = \lambda_j X_j$ , on a :  $P^{-1}MP \cdot E_j = P^{-1}MX_j = P^{-1}\lambda_j X_j = \lambda_j E_j$ , ce qui signifie que la  $j$ -ième colonne de  $P^{-1}MP$  est  $\lambda_j E_j$ . Ainsi,  $P^{-1}MP$  est la matrice diagonale écrite ci-dessus et en multipliant par  $P$  à gauche et  $P^{-1}$  à droite, on trouve la formule.

Revenons au problème initial : étant donnée  $M = \begin{pmatrix} 1,9 & 0,9 \\ -1,8 & -0,8 \end{pmatrix}$ , calculer la matrice  $M^{100}$ . Ici, le polynôme caractéristique est :

$$\begin{aligned} \chi_M &= (1,9 - X)(-0,8 - X) - (0,9 \cdot -1,8) = X^2 - 1,1X + 0,1 \\ &= (X - 1)(X - 0,1). \end{aligned}$$

Comme il est scindé à racines simples, la matrice  $M$  est diagonalisable, de valeurs propres 1 et 0,1. Le calcul des espaces propres associés donne lieu à des systèmes linéaires sympathiques :

$$E_1(M) = \text{Ker}(M - I_2) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,9 \\ -1,8 & -1,8 \end{pmatrix} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$E_{0,1}(M) = \text{Ker}(M - 0,1I_2) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1,8 & 0,9 \\ -1,8 & -0,9 \end{pmatrix} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Donc si on pose

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-1} \end{pmatrix},$$

on a  $M = PDP^{-1}$ , d'où :

$$\begin{aligned} M^{100} &= P \cdot D^{100} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-100} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 - 10^{-100} & 1 - 10^{-100} \\ -2 + 2 \cdot 10^{-100} & -1 + 2 \cdot 10^{-100} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**3.4. Diagonalisation : raffinement.** Le critère de diagonalisabilité donné plus haut peut être amélioré à peu de frais, à condition d'introduire la notion suivante.

**DEFINITION 26.** Soient  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel  $E$ . On dit qu'ils sont *en somme directe* si pour tous  $x_1 \in F_1, \dots, x_p \in F_p$ , l'équation  $x_1 + \dots + x_p = 0$  implique  $x_1 = \dots = x_p = 0$ .

Soit  $F$  la somme des sous-espaces  $F_i : F = \{x_1 + \cdots + x_p \mid \forall i, x_i \in F_i\}$ . C'est le plus petit sous-espace de  $E$  contenant l'union des  $F_i$ . Quand les sous-espaces  $F_i$  sont en somme directe, on note

$$F = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p = \bigoplus_{i=1}^p F_i.$$

Dans ce cas, tout élément  $x$  de  $F$  admet une *unique* écriture sous la forme  $x = x_1 + \cdots + x_p$  avec, pour tout  $i$ ,  $x_i \in F_i$ .

En effet, si on peut aussi écrire  $x = x'_1 + \cdots + x'_p$  avec, pour tout  $i$ ,  $x'_i \in F_i$ , on trouve en soustrayant :

$$\underbrace{x_1 - x'_1}_{\in F_1} + \cdots + \underbrace{x_p - x'_p}_{\in F_p} = 0$$

Et la définition d'une somme directe dit que chacun des termes  $x_i - x'_i$  est nul : pour tout  $i$ ,  $x'_i = x_i$ .

En dimension finie, la dimension d'une somme directe se calcule facilement en fonction de celle de ses termes :

$$\dim \bigoplus_{i=1}^p F_i = \sum_{i=1}^p \dim F_i.$$

En effet, si on munit chaque  $F_i$  d'une base  $B_i$ , on peut les réunir en une base  $B$  de  $F$ . Pourquoi une base ? On voit vite que c'est une famille génératrice (tout élément de  $F$  est une somme d'éléments des  $F_i$  et tout élément de chaque  $F_i$  est une combinaison linéaire de vecteurs de  $B_i$ ). Pour voir qu'elle est libre, on suppose que 0 est combinaison linéaire des éléments de  $B$ , i.e. une somme de combinaisons linéaires des vecteurs de chaque  $B_i$ . Par unicité de la décomposition en somme de vecteurs des  $F_i$ , on obtient pour chaque  $i$  une combinaison linéaire nulle des vecteurs de la base  $B_i$ , donc finalement tous les coefficients sont nuls.

REMARQUE 51. Attention, pour que  $F_1, \dots, F_p$  soient en somme directe, il ne suffit pas que l'intersection des  $F_i$  soit  $\{0\}$  ! C'est vrai si  $p = 2$ , mais faux si  $p \geq 3$ . Pour s'en convaincre, on peut penser à trois droites distinctes de  $\mathbb{R}^2$  (passant par 0, bien sûr). Leur intersection est triviale, mais elles ne sont pas en somme directe (sinon, leur somme serait un sous-espace de dimension 3 de  $\mathbb{R}^2$ ).

LEMME 8. *Les espaces propres d'un endomorphisme sont en somme directe.*

*Démonstration.* Soit  $f \in L(E)$  un endomorphisme, de valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ . Pour tout  $i = 1, \dots, p$ , on se donne  $x_i \in E_{\lambda_i}(f)$ , et on suppose que  $\sum_{i=1}^p x_i = 0$ . Supposons par l'absurde qu'au moins l'un des  $x_i$  n'est pas nul et notons  $x_{i_1}, \dots, x_{i_q}$  tous ceux qui ne sont pas nuls. Ce sont alors des vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes, donc ils forment une famille libre. Cela contredit le fait qu'ils vérifient l'équation  $\sum_{k=1}^q x_{i_k} = 0$ .  $\diamond$

PROPOSITION 42. *Soit  $f \in L(E)$ .  $f$  est diagonalisable si et seulement si*

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E_{\lambda}(f).$$

*Démonstration.* Pour le sens direct, on observe que  $E$  possède une base constituée de vecteurs propres de  $f$ . Donc tout élément de  $E$  est combinaison de vecteurs propres, donc somme d'éléments des espaces propres  $E_\lambda(f)$ .

Pour le sens réciproque, on prend pour chaque  $\lambda \in \text{Sp}(f)$  une base  $B_\lambda$  de  $E_\lambda(f)$ . Puis on les réunit : cela donne une base de  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E_\lambda(f)$ , constituée de vecteurs propres.  $\diamond$

Concentrons-nous sur le cas où  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Soient  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Le théorème de D'Alembert-Gauss permet d'écrire

$$\chi_f = (-1)^n \prod_{\lambda \in \text{Sp}(f)} (X - \lambda)^{m_\lambda}.$$

Le nombre  $m_\lambda$  est la multiplicité de la racine  $\lambda$  du polynôme  $\chi_f$ .

Quand  $f$  est diagonalisable, on peut choisir une base  $B$  de vecteurs propres. En calculant le polynôme caractéristique dans cette base, on voit que

$$\chi_f = (-1)^n \prod_{\lambda \in \text{Sp}(f)} (X - \lambda)^{d_\lambda},$$

où  $d_\lambda$  est la dimension de l'espace propre  $E_\lambda(f)$ , i.e. le nombre de vecteurs propres associés à la valeur propre  $\lambda$  dans la base  $B$ . Donc, dans ce cas, la multiplicité  $m_\lambda$  est exactement  $d_\lambda$ . La proposition suivante dit que cela caractérise la diagonalisabilité.

**PROPOSITION 43.** *Soient  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f \in L(E)$ .  $f$  est diagonalisable si et seulement si la dimension  $d_\lambda$  de chaque espace propre est égale à la multiplicité  $m_\lambda$ .*

*Démonstration.* Le sens direct est prouvé ci-dessus. Pour le sens réciproque, on observe que le degré du polynôme  $\chi_f$  est  $n = \dim E$ . Donc  $n = \sum_\lambda m_\lambda$ . Puisque  $d_\lambda = m_\lambda$  pour toute valeur propre  $\lambda$ , on en tire  $n = \sum_\lambda d_\lambda$ . Mais cette somme n'est autre que la dimension de la somme directe  $F$  de tous les espaces propres  $E_\lambda(f)$ . Ainsi,  $F$  est un sous-espace de  $E$  de dimension  $n = \dim E$ , donc  $F = E$ . Par la proposition précédente, on en déduit que  $f$  est diagonalisable.  $\diamond$

**REMARQUE 52.** L'inégalité  $d_\lambda \leq m_\lambda$  est toujours vraie. Pour le voir, on calcule le polynôme caractéristique  $\chi_f$  dans une base  $B$  obtenue en complétant une base de l'espace propre  $E_\lambda(f)$ . Dans une telle base, la matrice de  $f$  est du type

$$[f]_B = \begin{pmatrix} \lambda I_{d_\lambda} & M \\ 0 & N \end{pmatrix}$$

(c'est une écriture par blocs :  $M$  et  $N$  sont des (sous-)matrices de taille convenable). En développant le déterminant définissant  $\chi_f$  par rapport à ses  $d_\lambda$  premières colonnes, on obtient  $\chi_f = (\lambda - X)^{d_\lambda} \cdot \chi_N$ , donc  $m_\lambda \geq d_\lambda$ .

**3.5. Diagonalisation simultanée.** Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la question suivante : étant donnés deux endomorphismes diagonalisables  $f$  et  $g$ , peut-on les diagonaliser simultanément, c'est-à-dire trouver une base dans laquelle la matrice de  $f$  et la matrice de  $g$  sont diagonales ? Il n'y a aucune raison pour que ce soit possible et d'ailleurs c'est souvent faux. Observons que deux matrices diagonales  $D$  et  $D'$  commutent toujours :  $DD' = D'D$ . Donc deux endomorphismes diagonalisables dans une même base doivent aussi commuter :  $f \circ g = g \circ f$ . On va voir que cette condition nécessaire est aussi suffisante. Le premier pas est la remarque suivante.

LEMME 9. *Si  $f$  et  $g$  commutent, alors tout espace propre de  $f$  est stabilisé par  $g$  :  $\forall x \in E_\lambda(f), \quad g(x) \in E_\lambda(f)$ .*

*Démonstration.* Soit  $x \in E_\lambda(f)$ . Alors :

$$f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x),$$

donc  $g(x) \in E_\lambda(f)$ . ◇

Quand un endomorphisme  $g$  d'un espace vectoriel  $E$  stabilise un sous-espace  $F$ , sa restriction  $g|_F$  est une application linéaire définie sur  $F$  et à valeurs dans  $F$ , précisément parce que  $F$  est stabilisé par  $g$ . On dit que  $g$  induit un endomorphisme de  $F$ , c'est-à-dire un élément  $g_F$  de  $L(F)$ , défini par  $g_F(x) = g(x)$  pour tout  $x \in F$ . On va relier les éléments propres de  $g$  à ceux des endomorphismes qu'il induit.

LEMME 10. *Soient  $E$  un espace vectoriel et  $g$  un endomorphisme de  $E$ . On suppose que  $E = F \oplus G$  pour des sous-espaces  $F$  et  $G$  stables par  $g$ . Alors pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $g$ ,*

$$E_\lambda(g) = (E_\lambda(g) \cap F) \oplus (E_\lambda(g) \cap G).$$

*Ainsi, tout vecteur propre de  $g$  est somme d'un vecteur propre de  $g_F$  et d'un vecteur propre de  $g_G$ .*

*Démonstration.* Soit  $x \in E_\lambda(g)$ . Comme  $E = F \oplus G$ , on peut écrire  $x = v + w$  avec  $v \in F$  et  $w \in G$ . Puisque  $g(x) = \lambda x$ , on en déduit

$$\underbrace{g(v)}_{\in F} + \underbrace{g(w)}_{\in G} = \underbrace{\lambda v}_{\in F} + \underbrace{\lambda w}_{\in G}.$$

Par unicité de la décomposition dans la somme directe  $F \oplus G$ ,  $g(v) = \lambda v$  et  $g(w) = \lambda w$ . Donc  $v$  est dans  $E_\lambda(g) \cap F$  et  $w$  dans  $E_\lambda(g) \cap G$ . Cela prouve l'inclusion

$$E_\lambda(g) \subset (E_\lambda(g) \cap F) + (E_\lambda(g) \cap G).$$

L'autre inclusion est claire (chacun des termes est inclus dans  $E_\lambda(g)$ ). Et la somme est directe en raison de l'inclusion

$$(E_\lambda(g) \cap F) \cap (E_\lambda(g) \cap G) \subset F \cap G = \{0\}.$$

◇

PROPOSITION 44. *Soient  $E$  un espace vectoriel et  $g$  un endomorphisme diagonalisable de  $E$ . On suppose que  $E = F \oplus G$  pour des sous-espaces  $F$  et  $G$  stables par  $g$ , de sorte que  $g$  induit des endomorphismes  $g_F \in L(F)$*



et  $g_G \in L(G)$ . Alors  $g$  est diagonalisable si et seulement si  $g_F$  et  $g_G$  sont diagonalisables.

*Démonstration.* Le sens  $\Leftarrow$  est facile : si  $g_F$  et  $g_G$  sont diagonalisables, on a une base de  $F$  constituée de vecteurs propres de  $g_F$  et une base de  $G$  constituée de vecteurs propres de  $g_G$  ; en les mettant bout à bout, on obtient une base de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $g$ , donc  $g$  est diagonalisable.

Passons au sens  $\Rightarrow$  : on suppose  $g$  diagonalisable. Pour voir que  $g_F$  est diagonalisable (le cas de  $g_G$  est similaire), on va vérifier la décomposition en somme directe :

$$F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(g)} (E_\lambda(g) \cap F).$$

Sur chaque sous-espace  $E_\lambda(g) \cap F$ ,  $g$  agit comme l'homothétie de rapport  $\lambda$ , donc, en mettant bout à bout des bases de ces sous-espaces, on obtiendra une base de vecteurs propres de  $g_F$ , ce qui démontrera la proposition.

Pour voir que le membre de droite est bien une somme directe, on se donne des vecteurs  $x_\lambda \in E_\lambda(g) \cap F$  tels que  $\sum_\lambda x_\lambda = 0$ . Alors chaque  $x_\lambda$  est dans l'espace propre  $E_\lambda(g)$ . Puisque les espaces propres de  $g$  sont en somme directe, tous les  $x_\lambda$  sont nuls. Cela prouve que le membre de droite est bien une somme directe. Chacun de ses termes étant inclus dans  $F$ , on voit aussi qu'il est inclus dans  $F$ .

Pour voir l'autre inclusion, on se donne un élément  $y$  de  $F$ . Puisque  $g$  est diagonalisable, on a la décomposition  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(g)} E_\lambda(g)$ , donc  $y = \sum_\lambda y_\lambda$ ,

avec  $y_\lambda \in E_\lambda(g)$  pour tout  $\lambda$ . Le lemme permet d'écrire, pour chaque  $\lambda$  :  $y_\lambda = v_\lambda + w_\lambda$ , avec  $v_\lambda \in E_\lambda(g) \cap F$  et  $w_\lambda \in E_\lambda(g) \cap G$ . Alors :

$$y - \sum_\lambda v_\lambda = \sum_\lambda w_\lambda.$$

Le membre de gauche de cette égalité est dans  $F$  et celui de droite dans  $G$ . Comme  $F \cap G = \{0\}$ , on en déduit qu'ils sont nuls, d'où

$$y = \sum_\lambda v_\lambda.$$

Cela prouve l'inclusion  $\subset$  et donc finalement l'égalité.  $\diamond$

**THÉORÈME 13.** Soit  $E$  un espace vectoriel. Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes diagonalisables de  $E$  tels que  $f \circ g = g \circ f$ . Alors  $f$  et  $g$  sont simultanément diagonalisables : il existe une base dans laquelle la matrice de  $f$  et la matrice de  $g$  sont diagonales

*Démonstration.* Puisque  $f$  est diagonalisable,  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E_\lambda(f)$ . On va travailler sur chaque espace propre séparément.

Soient  $\lambda$  une valeur propre de  $f$ ,  $F = E_\lambda(f)$  et  $G$  la somme des autres espaces propres de  $f$ . Alors  $E = F \oplus G$  et, puisque  $f$  et  $g$  commutent,  $F$  et  $G$  sont stabilisés par  $g$  (premier lemme). La proposition montre que l'endomorphisme  $g_F$  induit par  $g$  sur  $F = E_\lambda(f)$  est diagonalisable. On peut donc trouver une base  $B_\lambda$  de  $E_\lambda(f)$  constituée de vecteurs propres de  $g$ .

Ce sont aussi des vecteurs propres de  $f$ , puisque  $f$  agit par l'homothétie de rapport  $\lambda$  sur  $E_\lambda(f)$ .

En mettant bout à bout les bases  $B_\lambda$  de tous les espaces propres  $E_\lambda(f)$ , on obtient une base de  $E$  constituée de vecteurs propres communs de  $g$  et  $f$ .  $\diamond$

**3.6. Et...** La diagonalisation n'est pas toujours possible. Par exemple, les endomorphismes nilpotents n'ont que 0 comme valeur propre. S'ils étaient diagonalisables, ils ne pourraient donc qu'être nuls : tout endomorphisme nilpotent non nul n'est pas diagonalisable.

Quand la diagonalisation n'est pas possible, on peut rabattre ses attentes, et au lieu de chercher une matrice diagonale, tenter au moins de la rendre triangulaire : c'est la théorie de la *trigonalisation*. Miracle : *tout endomorphisme d'un espace vectoriel complexe de dimension finie est trigonalisable*.

On peut même pousser plus loin et tenter, comme les mathématiciens de la fin du XIX<sup>e</sup> siècle (Jordan, puis Frobenius), une classification systématique des opérateurs de  $\mathbb{C}^n$ . A suivre...

Et bonne chance pour les examens !

**3.7. Crédits.** Ce polycopié a été rédigé par Vincent Minerbe, mise à jour légère en 2023 par Frédéric Naud. Les premiers jets du poly de MA003 ont bénéficié des contributions des collègues Adrien Deloro, Benoit Sarels, Cyril Demarche, Daniel Pierre-Loti-Viaud, Jean-Pierre Marco, Sophie Chemla.